ELEMENTOS

DE GEOMETRÍA,

CON NOTAS,

POR A. M. LEGENDRE, MIEMBRO DEL INSTITUTO NACIONAL DE FRANCIA, Y DE LA SOCIEDAD REAL DE LONDRES.

TRADUCIDOS AL CASTELLANO

POR

DON ANTONIO GILMÁN.

MADRID:
IMPRENTA DE REPULLES.
1807.

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA.

LIBRO PRIMERO.

PRINCIPIOS.

DEFINICIONES.

I. La Geometría es una ciencia que tiene por objeto la medida de la extension.

La extension tiene tres dimensiones, longitud, latitud, y altura ó profundidad.

II. La *línea* es una longitud sin latitud.

Los extremos de una línea se llaman *puntos*: luego el punto no tiene extension.

III. La *línea recta* es el camino mas corto entre dos puntos.

IV. Toda línea, que no es recta, ni compuesta de líneas rectas, es una *línea curva*.

Así AB es una línea recta, ACDB una línea *quebrada*, ó compuesta de líneas rectas, y AEB es una línea curva. Fig. 1.

V. *Superficie* es una longitud y latitud sin profundidad ó altura.

VI. *Plano* es una superficie, cuyos puntos estan todos á una misma elevacion.

VII. Toda superficie, que no es plana, ni compuesta de superficies planas, es una *superficie curva.*

VIII. *Sólido ó cuerpo* es el que reune las tres dimensiones.

Fig. 2. IX. Llámase *ángulo* la mayor ó menor inclinacion que hay entre dos rectas qualesquiera AB y AC, que se cortan en un punto A, llamado el *vértice* del ángulo, y AB y AC se llaman sus *lados.*

Algunas veces para nombrar un ángulo se emplea solamente la letra del vértice A, y otras se hace con tres, como BAC ó CAB, teniendo cuidado de poner enmedio la letra del vértice. Se usa el primer modo, regularmente quando en un punto dado no hay mas que un ángulo, y no está expuesto á equivocarse con otros al nombrarlo con una sola letra.

Los ángulos son, como toda cantidad, susceptibles de adicion, sustraccion, multiplicacion y division.

Fig. 20. Así el ángulo DCE es la suma de los dos DCB y BCE, y el ángulo DCB es la diferencia de los dos DCE, BCE.

Fig. 3. X. Quando una recta AB encuentra á otra CD de modo que los ángulos adyacentes BAC y BAD sean iguales, cada uno de ellos se llama un *ángulo recto*, y la línea recta AB se dice *perpendicular* á la CD.

Fig. 4. XI. Todo ángulo BAC, menor que el recto, es un *ángulo agudo*; y todo ángulo DEF, mayor que el recto, es un *ángulo obtuso.*

Fig. 5. XII. De dos líneas se dice que son *paralelas* quando, situadas en un mismo plano, no pueden encontrarse aunque se las prolongue.

XIII. *Figura plana* es un plano terminado por todas partes de líneas. Si estas son rectas, el espacio que encierran se llama *figura rectilínea* ó *polígono*, y las líneas todas juntas forman el contorno ó *perímetro* de la figura.

Fig. 6.

XIV. El polígono de tres lados es el mas simple de todos, y se llama *triángulo*: el de quatro lados se denomina *quadrilátero*: el de cinco *pentágono*: el de seis *exâgono*, &c.

XV. Se llama triángulo *equilátero* aquel cuyos lados son todos iguales; triángulo *isósceles* aquel que solo tiene dos lados iguales; y triángulo *escaleno* aquel cuyos tres lados son todos desiguales. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

XVI. El triángulo *rectángulo* es el que tiene un ángulo recto, y el lado opuesto á este ángulo se llama *hypotenusa*; así ABC es un triángulo rectángulo en A, cuya hypotenusa es el lado BC. Fig. 10.

XVII. Entre los quadriláteros se distinguen:

El *quadrado* que tiene sus lados iguales y sus ángulos rectos. (*Véase la prop.* 21, *lib.* 1.) Fig. 11.

El *rectángulo* que tiene los ángulos rectos, sin tener los lados iguales. (*Véase la misma prop.*) Fig. 12.

El *paralelógramo* ó *rombo* que tiene los lados opuestos paralelos. Fig. 13.

El *losango*, cuyos lados son iguales, sin que los ángulos sean rectos. Fig. 14.

En fin el *trapecio*, que solo tiene paralelos dos lados. Fig. 15.

XVIII. Se llama *diagonal* toda recta que une los vértices de dos ángulos no contiguos, como AC. Fig. 42.

XIX. Polígono *equilátero* es aquel, cuyos lados son todos iguales; y polígono *equiángulo* es el que tiene iguales todos los ángulos.

XX. Dos polígonos son *equiláteros* entre sí, quando tienen sus lados iguales y colocados en un mismo órden; esto es, quando recorriendo sus contornos en un mismo sentido, el primer lado del uno es igual al primero del otro, el segundo al segundo, y así de los demas. Con la misma facilidad se entiende lo que son polígonos *equiángulos* entre sí.

En uno y otro caso los lados ó los ángulos iguales se llaman lados ó ángulos *homólogos*.

...

NOTA En los quatro primeros libros solo se tratará de las figuras planas, ó trazadas en una superficie plana.

Explicacion de los términos y signos.

Axîoma es una verdad tan evidente por sí misma, que no necesita de prueba.

Teorema es una verdad, cuya evidencia se hace patente por medio de un razonamiento llamado *demostracion.*

Problema es una qüestion propuesta, que exîge *resolucion.*

Lema es una verdad empleada subsidiariamente para demostrar un teorema, ó resolver un problema.

El nombre comun de *proposicion* se aplica indistintamente á los teoremas, problemas y lemas.

Corolario es la conseqüencia que se saca de una ó muchas proposiciones.

Escolio es una advertencia sobre una ó muchas proposiciones anteriores, dirigida á manifestar su conexîon, su extension y su utilidad.

Hypótesis es una suposicion que se hace ya en la cabeza de la proposicion, ya en el cuerpo de la demostracion.

El signo $=$ es el de la igualdad; así $A=B$ significa que A es igual á B.

Para manifestar que A es menor que B, se escribe $A<B$; y para expresar que A es mayor que B, así $A>B$.

El signo $+$ se pronuncia *mas*, é indica la adicion. El signo $-$ se pronuncia *ménos*, y denota la sustraccion: así $A+B$ representa la suma de las cantidades A, B; $A-B$ su diferencia, ó lo que queda restando B de A. Del mismo modo $A-B+C$ ó $A+C-B$ denota que se deben sumar A y C, y de la suma restar B.

El signo $\times$ se lee *multiplicado por*: así $A \times B$ representa el producto de A multiplicado por B. En vez de este signo se emplea algunas veces un punto; así 3.5 es lo mismo que 3×5, $A.B$ es igual á $A \times B$.

La expresion $A \times (B + C - D)$ representa el producto de A para la cantidad $B + C - D$. Si se hubiese de multiplicar $A + B$ por $A - B + C$, se indicará el producto así $(A + B) \times (A - B + C)$, considerando cada paréntesis como una sola cantidad.

Un número puesto delante de una línea ó cantidad sirve de multiplicador á esta línea ó cantidad. Así para expresar que hemos de tomar tres veces la línea AB, se escribe $3AB$; para señalar la mitad del ángulo A, se nota $\frac{1}{2} A$.

El quadrado de la línea AB se escribe $(AB)^2$ su cubo $(AB)^3$. Se explicará en su lugar lo que significa cabalmente el quadrado ó una potencia qualquiera de una línea.

El signo $\sqrt{}$ indica una raiz por extraer; así $\sqrt[2]{2}$ es la raiz quadrada de 2; $\sqrt[2]{(A \times B)}$ la raiz quadrada del producto $A \times B$. Pero siempre que la raiz propuesta para extraer es la quadrada, se omite el 2 entre las dos piernas del signo radical, y se escribe solo $\sqrt{2}$, $\sqrt{(A \times B)}$. El número que se halla al lado derecho de un paréntesis, un poco encima de la cantidad que se quiere elevar á una potencia qualquiera, se llama el *exponente de la potencia*: 2 es el exponente del quadrado ó de la segunda potencia; 3 del cubo ó de la tercera potencia, y así en los demas. Y el número que se escribe entre las dos piernas de un signo radical, se llama el *exponente* de la raiz; 2 es el exponente de la raiz quadrada ó segunda; 3 de la raiz tercera ó cúbica, y así de los demas.

Axîomas.

I. Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí.

II. El todo es mayor que su parte.

III. El todo es igual á la suma de las partes en que está dividido.

IV. De un punto á otro no se puede tirar mas que una línea recta.

V. Dos líneas, superficies ó sólidos, son iguales, quando sobrepuestas la una á la otra coinciden perfectamente.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Todos los ángulos rectos son iguales.

Fig. 16. Sea la línea recta CD perpendicular á AB, y GH á EF: digo que los ángulos ACD y EGH serán iguales.

Si se toman las quatro distancias iguales CA, CB, GE, GF, la distancia AB será igual á la distancia EF, y se podrá sobreponer la recta EF á la AB, de modo que el punto E caiga en A, y F en B. Estas dos líneas, así colocadas, coincidirán exâctamente una con otra; porque á no ser así, habria dos línas rectas de A á B, lo que es imposible*: luego el punto G, mitad de EF, caerá sobre el punto C, mitad de AB. Una vez sobrepuesto así el lado GE al lado CA, digo que el lado GH coincidirá con CD. Porque supongamos, si es posible, que caiga sobre una recta CK distinta de CD; ya que que por hypótesis *, el ángulo EGH = HGF, seria menester que tuviesemos ACK = KCB. Pero el ángulo ACK > ACD, el ángulo KCB < BCD, y además, por suposicion, ACD = BCD: luego ACK es mayor que KCB: luego la línea GH no puede caer sobre otra CK, distin-

* ax. 4.

Def. 10.

ta de CD : luego el ángulo EGH se ajusta con ACD: luego finalmente todos los ángulos rectos son iguales.

PROPOSICION II.

TEOREMA.

Toda recta CD, *que encuentra á otra* AB, *hace con ella dos ángulos adyacentes* ACD *y* BCD, *que valen juntos dos rectos.* Fig. 17.

En el punto C levántese á la AB la perpendicular CE.

El ángulo ACD es la suma de los dos ACE, ECD: luego ACD + BCD será la suma de los tres ángulos ACE, ECD, BCD. El primero de estos es recto, los otros dos forman juntos el ángulo recto BCE: luego la suma de los dos ángulos ACD y BCD vale dos rectos.

Corolario 1. Si uno de los ángulos ACD y BCD es recto, el otro tambien lo será.

Corolario 2. Si la recta DE es perpendicular á la AB, recíprocamente AB lo será á DE. Porque de ser DE perpendicular á AB, se infiere que los dos ángulos adyacentes ACD y DCB son iguales, y que ámbos son rectos. Pero si ACD es un ángulo recto, tambien su adyacente ACE lo será: luego ACE = ACD, y AB es perpendicular á DE. Fig. 18.

Corolario 3. Todos los ángulos BAC, CAD, DAE, EAF, &c., formados de un mismo lado de la recta BF, valen juntos dos rectos; porque su suma es igual á la de los dos ángulos BAC y CAF. Fig. 34.

PROPOSICION III.

TEOREMA.

Dos rectas, que tienen dos puntos comunes, coinciden una con otra en toda su extension, y forman una sola y misma recta.

Fig. 19. Sean A y B los dos puntos comunes.

Desde luego las dos líneas no deben formar mas que una entre A y B; porque á no ser así, habria de uno de estos puntos al otro dos rectas, lo que es imposible *. Supongamos ahora que estas rectas prolongadas empiezan á separarse en el punto C, que la una se convierte en CD, y la otra en CE. Tírese al punto C la CF, que forme con la CA el ángulo recto ACF. Ya que la ACD es una línea recta, FCD será un ángulo recto *; y por ser ACE tambien una línea recta, FCE será un ángulo recto. Pero la parte FCE no puede ser igual al todo FCD: luego dos rectas, que tienen dos puntos comunes A y B, no pueden separarse en punto alguno de su prolongacion, y forman por lo tanto una sola y misma recta.

* Ax. 4.

* Prop. 2. Cor. 1.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

Fig. 20. *Si dos ángulos adyacentes* ACD *y* DCB *valen juntos dos rectos, sus lados exteriores* AC *y* CB *estarán en línea recta.*

Porque si CB no es la prolongacion de AC, séalo CE. Entónces, siendo ACE una línea recta, la suma de los ángulos ACD, DCE valdrá dos rectos *. Pero, por suposicion, tambien la suma de los ángulos ACD, DCB vale dos rectos: luego ACD + DCB seria igual á ACD + DCE; si de ambas partes quitamos el ángulo ACD, quedaria la parte DCB igual al todo DCE, lo que es imposible: luego CB es la prolongacion de AC.

* Prop. 2.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

Fig. 21. *Siempre que dos rectas* AB, DE *se cortan, los ángulos opuestos en el vértice son iguales.*

Porque ya que DE es una línea recta, la suma de los ángulos ACD, ACE vale dos rectos; y por ser AB tambien una línea recta, la suma de los ángulos ACE, BCE es igual á dos rectos: luego la suma ACD + ACE es igual á la suma ACE + BCE. Quitando de una y otra parte el ángulo comun ACE, nos queda el ángulo ACD igual á su opuesto BCE.

Del mismo modo podria demostrarse, que el ángulo ACE es igual á su opuesto BCD.

Escolio. Los quatro ángulos, formados en un mismo punto por la interseccion de dos rectas, valen juntos quatro rectos. Porque los ángulos ACE, BCE tomados juntos valen dos rectos, y los otros dos ACD, BCD tienen tambien el mismo valor.

En general todos los ángulos ACB, BCD, DCE, ECF, &c., formados en un punto por la interseccion de varias rectas, sea el que fuere su número, valdrán juntos quatro ángulos rectos. Porque si en dicho punto formamos quatro ángulos rectos por medio de dos perpendiculares, el mismo espacio ocuparán estos que los varios ángulos ACB, BCD, &c. Fig. 22.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

Dos triángulos son iguales quando tienen un ángulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguales.

Sea el ángulo A igual á D, el lado AB igual á DE, el lado AC igual á DF: digo que los triángulos ABC y DEF son iguales. Fig. 23.

Con efecto estos triángulos pueden sobreponerse uno á otro, de modo que coincidan perfectamente. Y desde luego, si sobreponemos el lado DE á su igual AB, el punto D caerá en A, y el punto E en B. Pero ya que los ángulos A, D son iguales, si colocamos el lado DE sobre AB, el lado DF tomará la direccion AC. A

mas de esto FD es igual á AC : luego el punto F coincidirá con C, y los terceros lados EF y BC se ajustarán perfectamente: luego los dos triángulos DEF y ABC son
* Ax. 5. iguales.*

Corolario. Sentada ya la igualdad de tres cosas en un triángulo, esto es $A = D$, el lado AB igual á DE, y $AC = DF$; se puede deducir la de las otras tres, esto es, que $B = E$, $C = F$, y el lado $BC = EF$.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

Dos triángulos son iguales quando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales.

Fig. 23. Sea el lado $BC = EF$, el ángulo B igual á E, y $C = F$: digo que el triángulo DEF será igual al triángulo ABC.

Sobrepóngase el lado EF á su igual BC; el punto E caerá en B, y F en C. Por ser iguales los dos ángulos E y B, el lado ED tomará la direccion BA, y así el punto D caerá sobre alguno de la recta BA. Igualmente, ya que son iguales los ángulos F y C, la recta FD tomará la direccion CA, y el punto D coincidirá con alguno de la CA: luego el punto D, que debe hallarse á un tiempo en las dos rectas BA, CA, caerá sobre su interseccion A: luego los dos triángulos ABC y DEF coinciden uno con otro, y son perfectamente iguales.

Corolario. Sentada la igualdad de tres cosas en un triángulo, esto es, $BC = EF$, $B = E$, $C = F$, se puede inferir la de las otras tres, á saber $AB = DE$, $AC = DF$, y $A = D$.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

En un triángulo qualquiera, un lado, sea el que fuere, siempre es menor que la suma de los otros dos.

Porque la línea recta BC, por exemplo, es mas corta que BA + AC, por ser el camino mas breve de B á C.* Fig. 23. * Def. 3.

PROPOSICION IX.

TEOREMA.

Si desde un punto O, *tomado dentro de un triángulo* ABC, *se tiran á los extremos de un lado* BC, *las rectas* OB, OC, *la suma de dichas rectas será menor que la de los otros dos lados* AB *y* AC. Fig. 24.

Prolónguese BO hasta que encuentre á AC en D. La recta OC es mas corta que OD + DC*; si añadimos á ambas partes BO, resultará BO + OC < BO + OD + DC, ó BO + OC < BD + DC. *Prop. 8.

Tenemos tambien BD < BA + AD; añadiendo por ambas partes DC, saldrá BD + DC < BA + AC. Pero acabamos de hallar BO + OC < BD + DC: luego con mayor razon BO + OC < AB + AC, que era lo que ibamos á demostrar.

PROPOSICION X.

TEOREMA.

Si los dos lados AB, AC *del triángulo* ABC *son iguales á los dos* DE, DF *del triángulo* DEF, *cada uno al suyo; y si al mismo tiempo el ángulo* BAC, *comprehendido entre los primeros, es mayor que* EDF, *compre-* Fig. 25.

hendido entre los segundos; digo que el tercer lado BC *del primer triángulo será mayor que el tercero* FE *del segundo.*

Hágase el ángulo $CAG = D$, tómese $AG = DE$, y tírese la CG.

Los dos triángulos GAC y DEF son iguales, porque tienen por construccion igual el ángulo comprehendido entre lados iguales*, y tendremos por lo mismo $CG = EF$. Pueden aquí suceder tres casos, segun el punto G caiga fuera del triángulo ABC, sobre el lado BC, ó dentro del triángulo.

* Pr. 6.

Fig. 25. *Caso primero.* La línea recta GC es mas corta que $GI + IC$; la AB es tambien menor que $AI + IB$: luego $GC + AB$ son menores que $GI + IC + AI + IB$; ó lo que es lo propio, $GC + AB < AG + BC$. Si quitamos de una parte AB, y de la otra su igual AG, quedará $GC < BC$; pero $GC = EF$: luego $EF < BC$.

Fig. 26. *Caso segundo.* Si el punto G cae sobre el lado BC, es manifiesto que GC, ó su igual EF, será menor que BC.

Fig. 27. *Caso tercero.* Finalmente, si el punto G cae dentro del triángulo ABC, tendremos, por el teorema anterior, $AG + GC < AB + BC$. Quitando de una parte AG, y de la otra su igual AB, queda $GC < BC$, ó $EF < BC$.

PROPOSICION XI.

TEOREMA.

Dos triángulos son iguales quando tienen sus tres lados respectivamente iguales.

Fig. 23. Sea el lado $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$: digo que tendremos el ángulo $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Porque si el ángulo A fuese mayor que D, como los lados AB, AC son respectivamente iguales á DE, DF, deduciriamos, por el teorema anterior, que el lado BC es mayor que EF; y si el ángulo A fuese menor que D, sacariamos que el lado BC era menor que EF; pero BC es igual á EF: luego el ángulo A, no pudiendo ser mayor ni menor que el ángulo D, ha de ser por precision igual. Del mismo modo se demostraria que los ángulos B y E son iguales, como tambien C y F.

Escolio. Se puede advertir desde luego que los ángulos iguales estan opuestos á lados iguales; así es que los ángulos iguales A, D estan opuestos á los lados iguales BC, EF.

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos á lados iguales son iguales.

Sea el lado $BA = AC$: digo que tendremos el ángulo $C = B$. Fig. 28.

Del *vértice* A al punto D, medio de la *base* BC, tírese la AD.

Los dos triángulos ABD, ADC tendrán sus tres lados respectivamente iguales, esto es, AD comun $AB = AC$ por suposicion, y $BD = DC$ por construccion: luego sacamos, en virtud del teorema antecedente, que los ángulos B y C son iguales.

Corolario. Un triángulo equilátero es equiángulo al mismo tiempo, es decir, que tiene sus ángulos iguales.

Escolio. La igualdad de los triángulos ABD, ACD prueba al mismo tiempo que los ángulos BAD, DAC son iguales, y que el ángulo $BDA = ADC$: luego estos dos últimos son rectos: luego *toda línea, tirada desde el vértice de un triángulo isósceles al medio de su base, es perpendicular á esta, y divide al ángulo del vértice en dos partes iguales.*

En un triángulo que no sea isósceles se toma indistintamente por *base* un lado qualquiera, y entónces su *vértice* es el del ángulo opuesto. Pero en los triángulos isósceles se toman particularmente por *bases* los lados que no son ninguno de los iguales.

PROPOSICION XIII.

TEOREMA.

Recíprocamente, si son iguales dos ángulos en un triángulo, los lados opuestos lo serán tambien, y el triángulo será isósceles.

Fig. 29. Sea el ángulo ABC = ACB: digo que los lados AC y AB serán iguales.

Porque si estos lados no son iguales, sea AB el mayor de los dos. Tómese BD = AC, y tírese la DC. Los dos ángulos DBC, ACB son iguales por suposicion; los dos lados DB y BC lo son tambien á los otros dos AC
* Pr. 6. y CB: luego el triángulo DBC * seria igual al triángulo ACB. Pero es así que la parte no puede ser igual al todo: luego no puede haber desigualdad entre los lados AB, AC, y por consiguiente el triángulo ABC es isósceles.

PROPOSICION XIV.

TEOREMA.

De dos lados de un triángulo aquel es mayor que se opone á mayor ángulo, y recíprocamente de dos ángulos de un triángulo es mayor el que se opone á mayor lado.

Fig. 30. 1.° Sea el ángulo C > B: digo que el lado AB opuesto al ángulo C, será mayor que el lado AC opuesto al ángulo B.

Si hacemos el ángulo BCD = B, tendremos en el
* Pr. 13. triángulo BDC* BD = DC. Pero la línea recta AC es mas corta que AD + DC, y AD + DC = AD + DB: luego AB es mayor que AC.

2.° Sea el lado AB>AC: digo que el ángulo C, opuesto al lado AB, será mayor que B, opuesto al lado AC.

Porque de ser C<B se seguiria, segun lo que acabamos de demostrar, que AB<AC, y esto repugna contra lo supuesto. Si fuese C=B deduciriamos * AB=AC, lo que es tambien contra lo supuesto: luego no pudiendo el ángulo C ser menor que B, ni igual á él tampoco, ha de ser indispensablemente mayor. *Pr. 13.

PROPOSICION XV.

TEOREMA.

Desde un punto A, *dado fuera de una recta* DE, *no se puede tirar màs que una perpendicular á dicha recta.* Fig. 31.

Supongamos que se puedan tirar dos AB, AC.

Prolonguemos una de ellas AB la cantidad FB=AB, y tiremos la FC.

Los dos triángulos CBF, ABC son iguales, porque el ángulo CBF es recto igualmente que CBA, el lado CB es comun, y BF=AB; y de esta igualdad * de los triángulos BCF, BAC, se deduce que los ángulos BCF, BCA lo son tambien. Y siendo BCA un ángulo recto por suposicion, tambien BCF lo es. Pero si los ángulos adyacentes BCA, BCF valen juntos dos rectos, es menester que la línea ACF sea recta *; de donde resulta que entre los dos mismos puntos A, F se podrian tirar dos líneas rectas ABF y ACF; pero esto es un absurdo*: luego lo es tambien que desde un punto dado fuera de una recta, se puedan baxar á esta dos perpendiculares. *Pr. 6. *Pr. 4. * Ax. 4.

Escolio. Desde un punto C, dado en una recta AB, es igualmente imposible levantarla dos perpendiculares hàçia un mismo lado. Porque si CD, CE fuesen estas dos perpendiculares, los dos ángulos DCB, BCE serian rectos, y la parte seria igual al todo, lo qual es un absurdo manifiesto. Fig. 17.

PROPOSICION XVI.

TEOREMA.

Fig. 31. *Si desde un punto* A, *dado fuera de una recta, se tira á ella la perpendicular* AB, *y á diferentes puntos de dicha recta las obliquas* AE, AC, AD, &c.

1.° *La perpendicular* AB *será mas corta que qualquiera obliqua.*

2.° *Las dos obliquas* AC, AE, *tiradas equidistantemente á uno y otro lado de la perpendicular, serán iguales.*

3.° *De dos obliquas* AC, AD, ó AE, AD *tiradas á discrecion, aquella será mas larga, que mas se aparte de la perpendicular.*

Prolónguese la perpendicular AB la cantidad BF AB, y tírense las rectas FC, CD.

1.° Los triángulos CBF BCA son iguales, porque tienen iguales por rectos los dos ángulos CBF, CBA, el lado CB es comun, y el lado BF = BA: luego * los terceros CA, CF son iguales. Pero ABF, línea recta, es mas corta que la quebrada ACF: luego AB, mitad de ABF, es mas corta que AC, mitad de AC. Luego 1.° la perpendicular es mas corta que qualquiera obliqua.

* Pr. 6.

2.° Si suponemos BE = BC, como tenemos ya el lado BC comun, y el ángulo ABE = ABC, sacarémos de aquí que el triángulo ABE = ACB: luego los lados AE, AC son iguales. Luego 2.° dos obliquas equidistantes de la perpendicular son iguales.

3.° En el triángulo DFA la suma de las líneas AC, CF es menor * que la de los lados AD, FD: luego AC, mitad de la línea ACF, es mas corta que AD, mitad de ADF. Luego 3.° las obliquas mas distantes de la perpendicular son las mas largas.

* Pr. 9.

Corolario 1. La perpendicular es la verdadera medida de la distancia de un punto á una línea, pues es mas corta que qualquiera obliqua.

2. Desde un mismo punto no se pueden tirar á una misma recta tres rectas iguales; porque de ser esto así, habria á un mismo lado de la perpendicular dos obliquas iguales, lo que es imposible.

PROPOSICION XVII.

TEOREMA.

Si en el punto C, *mitad de la recta* AB, *se levanta la perpendicular* EF: 1.° *cada punto de la perpendicular equidistará de los dos extremos de la recta* AB: 2.° *todo punto que no esté en la perpendicular, no equidistará de dichos extremos.* Fig. 32.

Porque 1.°, ya que se supone AC=CB, las dos obliquas DA, BD se apartan igualmente de la perpendicular: luego son iguales. Lo mismo se verifica con las dos obliguas AE y EB, AF y FB, &c. Luego 1.° todos los puntos de la perpendicular equidistan de los extremos A, B.

2.° Sea I un punto fuera de la perpendicular. Si se tiran la IA é IB, una de estas líneas cortará á la perpendicular en el punto D, y tirando la DB, resulta DB=DA. Pero la recta IB es menor que la línea quebrada ID+DB, é ID+DB=ID+DA=IA: luego sacamos IB<IA. Luego 2.° todo punto fuera de la perpendicular no equidistará de los extremos A, B.

PROPOSICION XVIII.

TEOREMA.

Dos triángulos rectángulos son iguales quando tienen iguales la hypotenusa y un lado.

Sea la hypotenusa AC=DF, y el lado AB=DE: digo que los dos triángulos rectángulos ABC y DEF son iguales. Fig. 33.

Seria manifiesta esta igualdad, si los terceros lados fuesen iguales. Supongamos, si es posible, que estos lados no sean iguales, y que BC sea el mayor. Si tomamos BG=EF, y tiramos la AG, el triángulo ABG será igual al triángulo DEF; porque el ángulo recto B es igual al otro recto E; el lado AB=DE, y BG=EF:
* Pr. 6. luego estos triángulos son iguales *, y tenemos por lo tanto AG=DF. Pero por suposicion DF=AC: luego AG=AC. Pero la obliqua AC no puede ser igual á
* Pr. 16. AG *, porque dista mas de la perpendicular AB: luego es imposible que BC difiera de EF: luego los dos triángulos ABC, DEF son iguales.

PROPOSICION XIX.

LEMA.

La suma de los tres ángulos de un triángulo no puede valer mas que dos rectos.

Fig. 35. Sea, si es posible, ABC un triángulo, cuyos tres ángulos valgan mas que dos rectos.

Sobre la prolongacion de AC, tómese CE=AC; hágase el ángulo ECD=CAB, el lado CB=AB, y tírense las DE, BD.

El triángulo CDE será igual al triángulo BAC, pues ámbos tienen un ángulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguales *: luego tendremos el ángulo CED=ACB, el ángulo CDE=ACB, y el tercer lado ED igual á su correspondiente BC.
* Pr. 6.

Ya que ACE es una línea recta, la suma de los ángulos ACB, BCD, DCE es igual á dos rectos *; pero
* Pr. 2. Cor. 3. suponemos la suma de los ángulos del triángulo ABC mayor que dos rectos: luego tendremos CAB+ABC+ACB> ACB+BCD+ECD; quitando de ambas partes ACB comun, y CAB=ECD, quedará ABC> BCD; y por ser los lados AB, BC del triángulo ABC iguales á los CD, CB del triángulo BCD, se deduce que el ter-

cer lado AC del uno es mayor que el tercero BD del otro *. * Pr. 10.

Imaginemos ahora que se prolonga indefinidamente la AC, y tambien la serie de los triángulos iguales y semejantemente dispuestos ABC, CDE, EFG, GHI, &c. Si se unen los vértices inmediatos con las rectas BD, DF, FH, HK, &c., se formará al mismo tiempo otra serie de triángulos intermedios BCD, DEF, FGH, &c., que serán todos iguales unos con otros, pues tendran un ángulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguales: luego tendremos $BD = DF = FH = HK$, &c.

Esto sentado, ya que tenemos $AC > BD$, sea la diferencia $AC - BD = D$. Es claro que $2D$ será la diferencia entre la línea recta $ACE = 2AC$, y la recta ó quebrada $BDF = 2BD$; de modo que sacamos $AE - BF = 2D$. Tambien saldrá $AG - BH = 3D$, $AI - BK = 4D$, y así de los demas. Pero por pequeña que sea la diferencia D, es evidente que, repetido un número suficiente de veces, llegará á ser mayor que una longitud dada. Podremos, pues, suponer la serie de los triángulos continuada lo bastante para que resulte $AP - BQ > 2AB$, y así tendremos $AP > BQ + 2AB$. Pero al contrario, la línea recta AP es mas corta que la angulosa ABQP, que une los mismos extremos A, P; de modo que será siempre $AP < AB + BQ + QP$, ó $AP < BQ + 2AB$: luego la suposicion era un absurdo; luego la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede valer mas de dos rectos.

PROPOSICION XX.

TEOREMA.

En todo triángulo la suma de sus tres ángulos vale dos rectos.

Habiendo ya probado que la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos rectos, resta por demostrar que tampoco puede ser menor

...

Fig. 35. a. Sea ABC el triángulo propuesto, y sea, si es posible, la suma de sus ángulos $= 2P - Z$, representando P un ángulo recto, y Z la cantidad qualquiera que se supone falta á la suma de los ángulos para valer dos rectos. Sea A el ángulo menor del triángulo ABC.

Sobre el lado opuesto BC hágase el ángulo BCD $=$ ABC, y CBD $=$ ACB; y resultan iguales los triángulos BCD y ACB, por tener un lado BC igual, adyacente á
* Pr. 7. dos ángulos respectivamente iguales *. Por el punto D tírese una línea recta qualquiera EF, que encuentre en E, F á los dos lados del ángulo A prolongados (1).

Ya que la suma de los ángulos de cada uno de los triángulos ABC, BCD es $2P - Z$, y que la de cada uno
* Pr. 19. de los triángulos EBD, DCF no puede pasar de $2P$ *, se sigue que la suma de los ángulos de los quatro triángulos ABC, BCD, EBD, DCF no pasa de $4P - 2Z + 4P$, ú $8P - 2Z$. Si de esta suma se resta la de los ángulos B, C, D, que es $6P$, porque la suma de los án-
* Pr. 2. gulos formados en cada uno de estos puntos es $2P$ *, el
Cor. 3. residuo será igual á la suma de los ángulos del triángulo AEF: luego esta suma no pasa de $8P - 2Z - 6P$, ó $2P - 2Z$.

Así es, que siendo preciso añadir Z á la suma de los ángulos del triángulo ABC para que componga el valor de dos rectos, es indispensable añadir á lo ménos $2Z$ á la suma de los ángulos del triángulo AEF para que llegue á dicho valor.

Por medio del triángulo AEF se construirá semejantemente otro tercero tal, que será preciso añadir á lo ménos $4Z$ á la suma de sus tres ángulos, para que el todo valga dos rectos; y valiéndose de este tercer triángulo, se construirá del mismo modo otro quarto, en el

(1) Se supone que A es el ángulo menor del triángulo ABC, y que por lo tanto es menor, ó á lo ménos no mayor que dos tercios del recto, á fin de hacer mas patente la posibilidad de que una recta tirada por el punto D, encuentre á un tiempo los dos lados AB, AC prolongados.

qual será preciso añadir quando ménos 8Z á la suma de sus tres ángulos para que el todo componga el valor de dos rectos, y así de los demas.

Por lo tanto, por pequeño que sea el valor de Z, respecto al ángulo recto P, la serie Z, 2Z, 4Z, 8Z, &c., cuyos términos crecen en razon dupla, conducirá, á poco que se continúe, á un término igual á 2P ó mayor. Daremos entónces con un triángulo tal, que será preciso añadir á la suma de los ángulos una cantidad igual ó mayor que 2P, para que la suma total valga 2P. Bien se echa de ver que esta conseqüencia es un absurdo: luego tampoco puede admitirse la suposicion de donde se deriva, esto es, que es imposible que la suma de los tres ángulos de un triángulo valga ménos de dos rectos. En la proposicion próxîma pasada demostramos que esta suma tampoco podia ser mayor que dicha cantidad: luego queda probado que la suma de los tres ángulos de un triángulo vale justamente dos rectos.

Corolario I. Dados dos ángulos de un triángulo, ó solo su suma, conoceremos el tercero restando esta suma de la de dos rectos.

II. Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales á otros dos de otro triángulo, los terceros lo serán tambien; y los triángulos, cuyos sean, serán equiángulos entre sí.

III. En un triángulo no puede haber mas que un ángulo recto, porque si hubiera dos, el tercer ángulo no tendria valor alguno. Con mayor razon no podrá haber mas que un ángulo obtuso.

IV. En un triangulo rectángulo la suma de los dos ángulos agudos es igual á un recto.

V. En un triángulo equilátero cada ángulo es igual á los dos tercios de un recto, ó al tercio de dos rectos; de modo, que si I expresa el valor de un ángulo recto, el ángulo del triángulo equilátero será expresado por $\frac{2}{3}$.

VI. En todo triángulo BAC, si se prolonga el lado CA hácia D, el ángulo exterior BAD será igual á la su- Fig. 41.

ma de los dos internos opuestos B, C; porque, añadiendo por ámbas partes BAC, las dos sumas son iguales á dos ángulos rectos.

PROPOSICION XXI.

TEOREMA.

La suma de todos los ángulos interiores de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene ménos dos.

Sea ABCDEF, &c., el polígono propuesto.

Fig. 43. Desde el vértice de un mismo ángulo A tírense á todos los demas opuestos las diagonales AC, AD, AE, &c.

Se echa de ver desde luego que el polígono quedará dividido en cinco triángulos, si tiene siete lados: en seis triángulos, si tiene ocho lados: y en general en tantos triángulos ménos dos, como lados tenga el polígono; porque se pueden considerar dichos triángulos como que tienen por vértice comun el punto A, y por bases los diferentes lados del polígono, excepto los dos que forman el ángulo A. Se ve al mismo tiempo que la suma de los ángulos de estos triángulos en nada difiere de la de los ángulos del polígono: luego esta última suma es igual á tantas veces dos ángulos rectos como triángulos hay, esto es, tantas ménos dos como lados tiene el polígono.

Corolario I. La suma de los ángulos de un quadrilátero es igual á dos rectos multiplicados por 4—2, que compone quatro ángulos rectos: luego si todos los ángulos de un quadrilátero son iguales, cada uno será recto; lo qual comprueba la definicion XVII, donde se ha supuesto que los quatro ángulos son iguales en un quadrilátero, si este es rectángulo ó quadrado.

II. La suma de los ángulos de un pentágono es dos rectos multiplicados por 5—2, que compone seis ángulos rectos: luego quando un pentágono es *equiángulo*, esto es, quando tiene iguales todos sus ángulos, cada uno de estos vale un quinto de seis rectos, ó $\frac{6}{5}$ de un recto.

III. La suma de los ángulos de un exâgono es $2 \times (6 - 2)$ ú 8 ángulos rectos: luego en el exâgono equiángulo, cada ángulo vale la sexta parte de ocho rectos, ó los $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ de un recto, y así de los demas.

Escólio. Si se quisiese aplicar esta proposicion á un polígono que tuviese uno ó muchos ángulos *entrantes*, seria menester considerar cada uno de dichos ángulos como mayor que dos rectos. Para excusar tropiezos, solo consideraremos de aquí en adelante los polígonos de ángulos *salientes*, qué tambien se pueden llamar *polígonos convexôs*. Todo polígono convexô es tal, que una recta, tirada como se quiera, no puede encontrar á su contorno mas que en dos puntos. Fig. 43.

PROPOSICION XXII.

TEOREMA.

Si dos líneas rectas AC, ED *son perpendiculares á una tercera* AE, *estas dos rectas serán paralelas, es decir, que no podrán encontrarse por mas que se las prolongue.* Fig. 36.

Porque si se encontrasen en un punto O, habria dos perpendiculares OA, OE baxadas de un mismo punto O á una misma recta AE, lo que es imposible.* * Pr. 15.

PROPOSICION XXIII.

TEOREMA.

Si dos rectas AC, BD *forman con otra tercera* AB *dos ángulos internos* CAB, ABD, *cuya suma sea igual á dos rectos, las rectas* AC, DB *serán paralelas.* Fig. 36.

Si los ángulos CAB, ABD fuesen iguales, serian ambos rectos, y dariamos en el caso de la proposicion anterior.

Supongamos, pues, que estos ángulos no son iguales.

Por el punto A tírese la AE perpendicular á BD.

* Pr. 20. Cor. 4. En el triángulo rectángulo ABE la suma de los dos ángulos agudos ABE, BAE es igual á un recto *. Si quitamos esta suma de la de los dos ángulos ABE, BAC, que por suposicion es igual á dos rectos, quedará el ángulo CAE igual á un recto: luego las dos rectas AC, BD son perpendiculares á una misma línea AE: luego son

* Pr. 22. paralelas. *

PROPOSICION XXIV.

TEOREMA.

Fig. 36. a. *Si dos rectas* AF, BD *forman con una tercera* AB *dos ángulos internos* FAB, ABD, *cuya suma sea menor ó mayor que dos rectos: digo que estas dos rectas* AF, BD *prolongadas suficientemente se encontrarán.*

Tírese AC de modo que la suma de los ángulos CAB + ABD sea igual á dos rectos.

Pueden suceder dos casos, segun el ángulo BAF sea menor ó mayor que BAC, esto es, segun la suma dada FAB + ABD sea menor ó mayor que dos ángulos rectos.

1.° Sea el ángulo BAF < BAC.

Tírese por el punto A una obliqua qualquiera AM, que encuentre á la BD en el punto M.

Los dos ángulos AMB y MAC serán iguales, porque si añadimos á una y otra parte una misma cantidad MAB + ABM, las dos sumas son iguales cada una á dos ángulos rectos. Si tomamos ahora MN = AM, y tiramos la recta AN, el ángulo AMB, externo del triángulo MAN, es igual á la suma de los dos internos opuestos

* Pr. 10. MAN y ANM *. Estos son iguales entre sí por ser AM = AN: luego el ángulo AMB, ó su igual MAC es duplo de MAN: luego tambien la recta AN divide en dos partes iguales el ángulo CAM, y encuentra á la

BD en un punto N situado á la distancia $MN = AM$. De la misma demostracion se deduce que, si sobre la línea recta BD se toma del mismo modo $NP = AN$, hallaremos el punto P, donde debe ir á dar la recta que divida en dos partes iguales al ángulo CAN. Se puede por lo tanto tomar así succesivamente la mitad, la quarta, la octava parte, &c., del ángulo CAM, y las rectas que verifiquen estas divisiones encontrarán á la BD en puntos cada vez mas distantes, pero fáciles de determinar, pues tendremos succesivamente $MN = AM$, $NP = AN$, $PQ = AP$, &c. Se puede notar tambien que cada distancia del punto de interseccion al punto A no es cabalmente dupla de la distancia de la interseccion anterior; porque AN, por exemplo, es menor que la suma $AM + MN$, ó que el duplo de AM. Tenemos igualmente $AP < 2AN$, $AQ < 2AP$, y así de los demas. Pero si continuamos subdiviendo el ángulo CAM en razon dupla, daremos en breve con un ángulo CA2 menor que el dado CAF, y será tambien cierto que AZ prolongada encuentra á la BD en un punto determinado: luego con mayor razon la recta AF, situada en el ángulo BAZ, encontrará á la BD: luego si los dos ángulos BAF y ABD componen juntos una suma, cuyo valor sea menor que el de dos rectos, las rectas AF, BD prolongadas suficientemente se encontrarán.

2.° Supongamos que los dos ángulos FAB, ABD valen juntos mas que dos rectos. Fig. 36. b.

Prolónguese FA hácia G, y DB hácia E.

La suma de los quatro ángulos FAB, BAG, ABD, ABE será igual á quatro rectos *; y si quitamos $FAB + ABD$ mayor que dos rectos, el residuo $BAG + ABE$ será menor que dichos dos ángulos rectos: luego las rectas AG y BE, prolongadas suficientemente, se encontrarán.

* Pr. 2.

Corolario. Por un punto dado A no se puede tirar mas que una paralela á la línea recta BD; porque no hay mas que una recta AC, que haga la suma de los ángulos $BAC + ABD$ igual al valor de dos rectos, y es- Fig. 36. a.

ta es la paralela que se desea; pues qualquiera otra recta AF haria la suma de estos ángulos mayor ó menor que dos rectos: luego encontraria á la BD.

PROPOSICION XXV.

TEOREMA.

Fig. 37. *Si dos paralelas* AB, CD *estan cortadas por una secante* EF, *la suma de los dos ángulos interiores* AGO *y* GOC *será igual á dos rectos.*

Porque si esta suma fuese mayor ó menor, las dos rectas AB, CD se encontrarian de un lado ú otro *, y no serán paralelas.

* Pr. 24.

Corolario I. Si el ángulo GOC es recto, AGO debe serlo tambien: luego *toda recta, perpendicular á una de dos paralelas, lo es tambien á la otra.*

Corolario II. Una vez que AGO + GOC vale dos ángulos rectos, y GOD + GOC tiene tambien el mismo valor, si quitamos de ambas partes GOC, tendrémos el ángulo AGO igual á GOD. Por consiguiente los quatro ángulos agudos EGB, AGO, GOD, COF son iguales entre sí; lo mismo sucede con los quatro obtusos AGE, OGB, COG, DOF; y al mismo tiempo si á los quatro ángulos obtusos se añade á cada uno de ellos un ángulo agudo, la suma compondrá siempre dos rectos.

Escolio. Ordinariamente se dan nombres particulares á algunos de estos ángulos comparados de dos en dos. Ya hemos llamado á los ángulos AGO, GOC *internos de un mismo lado*: los BGO, GOD tienen el mismo nombre: los ángulos AGO, GOD se llaman *alternos-internos*, ó simplemente *alternos*; y la misma denominacion se da á los BGO, GOC. Los ángulos EGB y GOD se denominan *internos-externos*, y en fin EGB y COF toman el nombre de *alternos-externos*. Se pueden por consiguiente mirar como ya demostradas las proposiciones siguientes:

1.ª Los ángulos internos de un mismo lado valen juntos dos rectos.

2.ª Los ángulos alternos-internos son iguales.

3.ª Los internos-externos lo son tambien.

4.ª Los ángulos alternos-externos son iguales.

Recíprocamente, si qualesquiera de estos ángulos son iguales, se puede deducir que las líneas á que pertenecen son paralelas. Sea, por exemplo, el ángulo AGO = GOD. Ya que GOC + GOD valen dos rectos, tendremos tambien AGO + COG iguales á dichos dos rectos: luego * las rectas AG, CO son paralelas. * Pr. 23.

PROPOSICION XXVI.

TEOREMA.

Dos rectas AB, CD, *paralelas á una tercera, son paralelas entre sí.* Fig. 38.

Tírese la secante PQR perpendicular á EF.

Ya que AB y EF son paralelas, PR será perpendicular á AB*; igualmente, por ser CD paralela á EF, la secante PR será perpendicular á CD: luego son paralelas.* * Pr. 25. Cor. 1. * Pr. 22.

PROPOSICION XXVII.

TEOREMA.

Dos paralelas siempre equidistan entre sí.

Entre las dos paralelas AC, BD tírense á discrecion las dos perpendiculares AB y CD: digo que estas dos perpendiculares serán iguales. Fig. 39.

Las rectas AB, CD, perpendiculares á una de las paralelas, lo son tambien á la otra *; y si se levanta en la mitad de AC la perpendicular EF, tambien la EF será perpendicular á BD; de modo que todos los ángu- * Pr. 35.

los en A, E, C, B, F, D serán rectos. Esto sentado, digo que el quadrilátero AEFB puede sobreponerse y coincidir con el otro quadrilátero CEFD, porque el lado EF es comun, el ángulo AEF es igual á FEC, y los lados EA, EC son iguales por construccion: luego el punto A coincidirá con C. Pero el ángulo EAB es igual á ECD: luego AB y CD estarán en una misma direccion. Por otra parte el ángulo EFB es tambien igual á EFD: luego BF y DF siguen la misma direccion: luego los dos quadriláteros coincidirán perfectamente uno con otro, y tendremos por último AB=CD.

PROPOSICION XXVIII.

TEOREMA.

Fig. 40. *Si dos ángulos* BAC, DEF *tienen sus lados paralelos cada uno al suyo, y en una misma direccion, dichos ángulos serán iguales.*

Prolónguese, si es necesario, DE hasta que encuentre á AC en G.

Los dos ángulos DEF, DGC son iguales, porque
*Pr. 25. EF y GC son paralelas *; el ángulo DCG = BAC, porque DG es paralela á AB: luego el ángulo DEF = BAC.

Escolio. Se exceptúa esta proposicion quando EF y AC esten en una misma direccion, y ED en el mismo sentido que AB; porque si se prolonga FE hácia H, el ángulo DEH tendrá sus lados paralelos á los de BAC; pero estos ángulos no serán iguales, porque EH y AC estan en direccion contraria: en este caso los dos ángulos HED y CAB valdrian juntos dos rectos.

PROPOSICION XXIX.

TEOREMA.

Los lados opuestos de un paralelógramo son iguales, y lo mismo sus ángulos.

Tírese la diagonal BD. Fig. 44.

Los dos triángulos ADB, DBC tienen el lado BD comun; ademas, á causa de las paralelas AD, BC, el ángulo ADB = DBC *; y por motivo tambien de las paralelas AB, CD, el ángulo ABD = BDC: luego los dos triángulos BDA y BDC son iguales *: luego el lado AB opuesto al ángulo ADB, es igual al lado DC, opuesto al ángulo igual DBC, y tambien son iguales los terceros AD, BC: luego los lados opuestos de un paralelógramo son iguales. * Pr. 25. * Pr. 7.

En segundo lugar, de la igualdad de los mismos triángulos se deduce que los ángulos A, C son iguales; y tambien que el ángulo ADC, compuesto de los dos ADB, BDC es igual á ABC, compuesto de los otros dos DBC y ABD: luego los ángulos opuestos de un paralelógramo son iguales.

Corolario. Luego dos paralelas BA y CD, comprehendidas entre otras dos AD y BC, son iguales.

PROPOSICION XXX.

TEOREMA.

Si en un quadrilátero ABCD *los lados opuestos son iguales, esto es,* AB = CD, y AD = BC, *los lados iguales serán paralelos, y la figura será un paralelógramo.* Fig. 44.

Tírese la diagonal BD.

Los dos triángulos ABD, BDC tendrán sus tres lados respectivamente iguales: luego serán iguales: luego el ángulo ADB, opuesto al lado AB, es igual á DBC, opuesto á CD; y por lo tanto AD y BC son paralelas.* Por una razon semejante AB es paralela á CD: luego el quadrilátero ABCD es un paralelógramo. * Pr. 25.

PROPOSICION XXXI.

TEOREMA.

Fig. 44. *Si dos lados opuestos* AB, CD *de un quadrilátero son iguales y paralelos, tambien los otros dos lo serán, y la figura* ABCD *será un paralelógramo.*

Tírese la diagonal BD.

Por ser AB y CD paralelas, los ángulos alternos ABD, BDC son iguales *, ademas, el lado AB = DC, y DB comun: luego los dos triángulos ABD y DBC son iguales *: luego el lado AD = BC, el ángulo ADB = DBC, y por consiguiente AD es paralela á BC: luego la figura ABCD es un paralelógramo.

* Pr. 25.
* Pr. 6.

PROPOSICION XXXII.

TEOREMA.

Fig. 45. *Las dos diagonales* AC, DB *de un paralelógramo se cortan mútuamente en dos partes iguales en el punto* O.

Porque si comparamos el triángulo ADO con el triángulo COB, tendremos el lado AD = CB, el ángulo ADO = CBO *, y el ángulo DAO = OCB: luego estos dos triángulos son iguales *: luego AO, lado opuesto al ángulo ADO, es igual á OC, opuesto á OBC: luego tambien DO = OB.

* Pr. 25.
* Pr. 7.

Escolio. En el losango son iguales los lados AB y BC, y por eso los triángulos AOB, OBC, cuyos tres lados son respectivamente iguales, son tambien iguales; de donde se deduce que el ángulo AOB = BOC, y que así las dos diagonales del losango se cortan mútuamente en ángulos rectos.

LIBRO II.

EL CÍRCULO Y LA MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

DEFINICIONES.

I. La *circunferencia del círculo* es una línea curva, cuyos puntos equidistan todos de otro interior, llamado *centro*. Fig. 46.

Llámase círculo el espacio que abraza esta línea curva.

N. B. Algunas veces confundimos el círculo con su circunferencia; pero es muy fácil dar á cada una de estas voces su valor, acordándose que el círculo es una superficie, que tiene longitud y latitud, y la circunferencia es una línea.

II. Toda recta CA, CE, CD, &c., tirada del centro á la circunferencia, se llama *radio ó semidiámetro*; y toda recta, que pasa, como AB, por el centro, terminándose por ámbas partes en la circunferencia, se llama *diámetro*.

Segun la definicion del círculo todos los radios son iguales, y lo son tambien todos los diámetros, siendo duplos de los radios.

III. Se llama *arco* una porcion de circunferencia qualquiera como FHG.

La *cuerda* ó *subtensa* del arco, es la recta FG, que une sus extremos.

IV. *Segmento* es la superficie ó porcion de círculo comprehendida entre el arco y la cuerda.

N. B. A una misma cuerda FG corresponden siempre dos arcos FHG, FEG, y por consiguiente tambien dos segmentos; pero siempre se supone que se trata del mas pequeño, á ménos que no se advierta lo contrario.

V. *Sector* es la parte del círculo comprehendida entre un arco DE y los dos radios CD, CE tirados á sus extremos.

Fig. 47. VI. Se llama *línea inscrita en el círculo* aquella, cuyos extremos estan en la circunferencia, como AB; *Ángulo inscrito*, todo el que, como BAC, tiene su vértice en la circunferencia, y cuyos lados son dos cuerdas.

Triángulo inscrito, un triángulo como ABC, cuyos tres ángulos tienen sus vértices en la circunferencia.

Y en general, *figura inscrita* toda la que tiene los vértices de sus ángulos en la circunferencia; y en este caso se dice que el círculo está *circunscrito* á esta figura.

Fig. 48. VII. Se denomina *secante* toda recta que encuentra á la circunferencia en dos puntos, teniendo parte fuera de ella, tal es AB.

VIII. *Tangente* es toda recta que solo toca á la circunferencia en un punto, como CD. El punto comun M se denomina *punto de contacto.*

IX. Igualmente son tangentes dos circunferencias, quando no tienen mas que un solo punto de contacto.

X. Un polígono está *circunscrito á un círculo*, quando todos sus lados son *tangentes* á la circunferencia, y en este caso se dice tambien que el círculo está *inscrito* en el polígono.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Todo diámetro AB *divide al círculo y á su circunferencia en dos partes iguales.* Fig. 49.

Porque si sobreponemos la figura AEB á la AFB, conservando la base AB, será menester que la línea curva AEB caiga exâctamente sobre la otra curva AFB; pues de no ser así, habria en una ú otra puntos que no equidistarian del centro, lo qual repugna contra la definicion del círculo.

PROPOSICION II.

TEOREMA.

Toda cuerda es menor que el diámetro.

Á los extremos de la cuerda AD tírense los radios AC, CD. Fig. 49.

Tendremos la línea recta $AD < AC + CD$, ó AD menor que AB.

Corolario. Luego el diámetro es la recta mayor que se puede inscribir en un círculo, ó el diámetro es la mayor de todas las cuerdas.

PROPOSICION III.

TEOREMA.

Una recta qualquiera no puede encontrar á la circunferencia mas que en dos puntos.

Porque si la encontrara en tres, estos tres puntos equidistarian del centro, y seria entónces posible tirar desde un mismo punto á una recta otras tres iguales, lo qual es un absurdo.*

* Pr. 16.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

En un mismo círculo, ó en círculos iguales, las cuerdas iguales subtenden arcos iguales, y recíprocamente á arcos iguales corresponden cuerdas iguales.

Fig. 50. Siendo los dos radios AC, EO iguales, y tambien los arcos AMD y ENG: digo que la cuerda AD será igual á EG.

Porque siendo iguales los dos diámetros AB, EF, el semicírculo AMDB podrá sobreponerse y coincidir con el otro semicírculo ENGF, y la línea curva AMDB ajustará perfectamente con la línea curva ENGF. Pero suponemos la porcion AMD igual á la porcion ENG: luego el punto D coincidirá con G, y las dos cuerdas AD, EG serán iguales.

Recíprocamente, suponiendo siempre el radio AC = EO, si la cuerda AD = EG: digo que el arco AMD será igual al arco ENG.

Porque una vez tirados los radios CD, OG, los dos triángulos ACD y EOG tendrán sus tres lados respectivamente iguales, esto es, AC = EO, CD = OG, AD = EG: luego estos triángulos son iguales *; y por consiguiente el ángulo ACD = EOG. Pero sobreponiendo el semicírculo ADB á su igual EGF, ya que los ángulos ACD y EOG son iguales, es claro que el radio CD caerá sobre OG, y el punto D sobre G: luego los arcos AMD y ENG son iguales.

* Pr. 11. Bib. 1.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

En un mismo círculo, ó en círculos iguales, al mayor arco corresponde mayor cuerda, y recíprocamente

(siempre que los arcos sean menores que una semicircunferencia).

Sea el arco AH mayor que AD.

Tírense las cuerdas AD y AH, y los radios CD, CH.

Los dos lados AC, CH del triángulo ACH son iguales á los otros dos AC, CD del triángulo ACD; el ángulo ACH es mayor que ACD: luego * el tercer lado AH es mayor que su correspondiente AD: luego á mayor arco corresponde mayor cuerda. Fig. 50. * Pr. 10. Lib. I.

Recíprocamente, si suponemos la cuerda AH mayor que AD, se deducirá de los mismos triángulos que el ángulo ACH es mayor que ACD, y por lo mismo tambien el arco AH mayor que AD.

Escolio. Suponemos que los arcos de que tratamos son menores que una semicircunferencia. Porque si fueran mayores, se verificaria la propiedad contraria; aumentando el arco disminuirá la cuerda, y al reves. Así, como el arco AKBD es mayor que AKBH, la cuerda AD del primero es menor que la cuerda AH del segundo.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

El radio CG, *perpendicular á una cuerda* AB, *divide á esta cuerda y al arco* AGB *que subtende en dos partes iguales.* Fig. 51.

Tírense los radios CA, CB.

Estos radios son, respecto á la perpendicular, dos obliquas iguales: luego equidistan de la perpendicular *: luego AD=DB. * Pr. 16. Lib. I.

En segundo lugar, por ser AD=DB, GC es una perpendicular levantada en la mitad de AB: luego * todos sus puntos deben equidistar de los extremos A, B. El punto G es uno de ellos: luego la distancia AG=GB. Pero si las dos cuerdas AG, GB son iguales, sus arcos respectivos AG, GB deben serlo tambien *: luego el * 17. I.

radio CG, perpendicular á la cuerda AB, divide al arco que dicha cuerda subtende en dos partes iguales en el punto G.

Escolio. El centro C, el punto D mitad de la cuerda AB, y G mitad del arco que subtende, son tres puntos situados en una misma recta perpendicular á la cuerda. Pero es así que bastan dos puntos para determinar la posicion de una recta: luego toda recta, que pase por dos de los mencionados puntos, pasará indefectiblemente por el tercero, y será perpendicular á la cuerda.

Dedúcese de aquí *que la perpendicular levantada en la mitad de una cuerda, pasa por el centro, y por el medio del arco que dicha cuerda subtende.*

Porque esta perpendicular es la misma que se podria tirar del centro á la cuerda, pues ámbas pasan por el medio de esta.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

Fig. 52. *Por tres puntos dados* A, B, C, *como no esten en línea recta, se puede hacer pasar siempre una circunferencia; pero solo puede pasar una.*

Tírense las rectas AB, BC, y divídanse en dos partes iguales con las perpendiculares DE, FG: digo desde luego que estas perpendiculares se encontrarán en un punto O.

Porque las rectas DE, FG se cortarán por precision si no son paralelas. Pero supongamos que lo son: la recta AB, perpendicular á DE, lo será tambien á
* 25. 1. FG*, y el ángulo K seria recto; pero BK, prolongacion de BD, es diferente de BF, pues los tres puntos A, B, C no estan en una misma línea recta: luego habria dos perpendiculares á una misma línea tiradas
* Pr. 15. Lib. 1. desde un mismo punto, lo que es imposible*: luego

las dos perpendiculares DE, FG se cortarán siempre en un punto O.

Este punto, como perteneciente á la perpendicular DE, está á igual distancia de los dos A, B *; el mismo punto, como parte de la perpendicular FG, equidista de los dos B, C: luego las tres distancias OA, OB, OC son iguales: luego la circunferencia descripta desde el centro O, y con el radio OB, pasará por los tres puntos dados A, B, C. * Pr. 17. Lib. 1.

Ya está probado que se puede hacer pasar, siempre que se quiera, una circunferencia por tres puntos, que no esten en línea recta: digo ademas que solo se puede hacer pasar una.

Porque si hubiera otra segunda circunferencia, que pasase por los tres puntos dados A, B, C, su centro no podria estar fuera de la recta DE *, pues entónces no equidistaria de los puntos A, B; tampoco podria estar fuera de la recta FG, por una razon semejante: luego estaria á un tiempo en las dos rectas DE, FG. Pero es así que dos líneas rectas solo pueden cortarse en un punto: luego por tres puntos dados solo puede pasar una circunferencia. * Pr. 18. Lib. 1.

Corolario. Dos circunferencias no pueden encontrarse en mas de dos puntos; porque si tuvieran tres puntos comunes, tendrian un mismo centro, y ámbas se confundirian en una sola.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

Dos cuerdas iguales distan igualmente del centro, y de dos cuerdas desiguales, aquella dista mas del centro, que es menor.

1.° Sea la cuerda AB = DE. Fig. 53.

Divídanse estas cuerdas en dos partes iguales con las perpendiculares CF, CG, y tírense los radios CA, CD.

Los triángulos rectángulos CAF, DCG tienen las hipotenusas CA, CD iguales; ademas, el lado AF, mitad de AB, es igual á DG, mitad de DE: luego estos
* Pr. 16. Lib. 1. triángulos son iguales *, y el tercer lado CF del uno es igual al tercero CG del otro: luego 1.° las dos cuerdas iguales AB, DE equidistan del centro.

2.° Sea la cuerda AH mayor que DE, el arco AKH
* Pr. 5. será tambien mayor que el arco DME*. Sobre el arco AKH tómese la parte ANB=DME, tírese la cuerda AB, y tíresele á esta la perpendicular CF, y á la AH la CI. Es claro que CF es mayor que CO, y CO ma-
* Pr. 16. Lib. 1. yor que CI *: luego con mucha razon será CF>CI. Pero CF es igual á CG, pues las cuerdas AB, DE son iguales: luego tenemos CG>CI. Luego finalmente de dos cuerdas iguales es la menor la que dista mas del centro.

PROPOSICION IX.

TEOREMA.

Fig. 54. *Toda recta* BD, *perpendicular en el extremo de un radio* CA, *es tangente á la circunferencia.*

Porque toda obliqüa CE es mas larga que la perpen-
* Pr. 16. Lib. 1. dicular CA *: luego el punto E está fuera del círculo, y la línea BD no tiene mas que el punto A comun con
* Def. 8 la circunferencia: luego BD es una tangente. *

Escolio. Por un punto dado A no se puede tirar mas que una tangente á la circunferencia; porque si pudiesemos tirar otra, esta no seria perpendicular al radio CA: luego con relacion á esta nueva tangente, dicho radio seria una obliqüa, y la perpendicular, tirada desde el centro á esta tangente, seria mas corta que CA: luego esta pretendida tangente entraria en el círculo, y seria secante.

PROPOSICION X.

TEOREMA.

Dos arcos de la circunferencia como MN, PQ, *interceptados por dos paralelas* AB, DE, *son iguales.*

Pueden suceder tres casos.

1.º Si las paralelas son secantes, tírese el radio CH perpendicular á la cuerda MP.

Este radio será al mismo tiempo perpendicular á la NQ paralela á la MP *: luego el punto H será á un tiempo medio del arco MHP, y del arco NHQ *. Tendremos, pues, el arco MH=HP, y el arco NH=HQ; de donde resulta MH—NH=HP—HQ, esto es, MN=PQ. * Pr. 26. Lib. 1. * Pr. 6.

2.º Si de las dos paralelas AB, DE la una es secante, y la otra tangente, tírese al punto de contacto H el radio CH.

Este radio será perpendicular á la tangente DE *, y tambien á su paralela MP. Pero por ser CH perpendicular á la cuerda MP, el punto H es mitad del arco MHP: luego los arcos MH, HP, comprehendidos entre las paralelas AB, DE, son iguales. * Pr. 9.

3.º En fin, si las dos paralelas DE, LI son tangentes, la una en H, y la otra en K, tírese la secante paralela AB.

Segun lo que acabamos de demostrar, tendremos MH=HP, y MK=KP: luego el arco entero HMK=HPK, y se ve ademas que cada uno de estos arcos es una semicircunferencia.

PROPOSICION XI.

TEOREMA.

Si dos circunferencias se cortan en dos puntos, la recta que pase por sus centros será perpendicular á la cuerda que *une los puntos de interseccion, y la dividirá en dos partes iguales.*

Fig. 57. y 58. Porque la recta AB, que une los puntos de interseccion, es una cuerda comun á ámbos círculos, y si en el medio de esta cuerda se levanta una perpendicular,
* Pr. 6. debe pasar esta por los dos centros C y D *. Pero por dos puntos dados no se puede tirar mas que una línea recta: luego la que pasa por los centros será perpendicular á la cuerda comun, dividiéndola en dos partes iguales.

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

Si la distancia entre dos centros es mas corta que la suma de los radios, y al mismo tiempo el radio mayor es menor que la suma del mas pequeño y de la distancia
Fig. 57. y 58. *entre los centros, los dos círculos se cortarán.*

Porque para que se verifique la interseccion, es pre-
Fig. 57. ciso que sea posible el triángulo CAD. Es menester, pues, no solo que CD sea $<AC+AD$, sino tambien que el radio mayor AD sea $<AC+CD$. Pero es eviden-
Fig. 58. te, que siempre que se pueda construir el triángulo CAD, las dos circunferencias descritas desde los centros C, D, se cortarán en A y B.

PROPOSICION XIII.

TEOREMA.

Fig. 59. *Si la distancia* CD *entre los centros de dos círculos es igual á la suma de sus radios* AC, AD, *estos dos círculos serán tangentes exteriormente.*

Es claro que tendrán el punto A comun; pero tendrán solo este punto, porque para que tuviesen dos puntos comunes, sería menester que la distancia entre los centros fuese menor que la suma de los radios.

PROPOSICION XIV.

TEOREMA.

Si la distancia CD *entre los centros de dos círculos es igual á la diferencia de sus radios* CA, AD, *estos dos círculos serán tangentes interiormente.* Fig. 60.

Es claro desde luego que tienen el punto A comun, y que no pueden tener otro; porque para esto seria menester que el radio mayor AD fuese menor que la suma del radio AC y de la distancia CD de los centros*, lo que es imposible. *Prop. 12.

Corolario. Luego si dos círculos son tangentes exterior ó interiormente, los centros y el punto de contacto estan en una misma línea recta.

Escolio. Todos los círculos, cuyos centros estan en la recta CD, y que pasan por el punto A, son tangentes unos á otros, y solo tienen comun dicho punto A. Y si por este punto se tira la AE perpendicular á CD, la recta AC será una tangente comun á todos estos círculos. Fig. 59. y 60.

PROPOSICION XV.

TEOREMA.

En un mismo círculo, ó en círculos iguales, los ángulos iguales ACB, DCE, *cuyos vértices estan en el centro, interceptan en la circunferencia arcos iguales* AB, DE. Fig. 61.

Recíprocamente, si los arcos AB y DE *son iguales, los ángulos* ACB, DCE *lo serán tambien.*

Porque 1.° Si el ángulo ACB es igual á DCE, estos dos ángulos podrán sobreponerse uno á otro, y como sus lados son iguales, es claro que el punto A caerá en D, y B en E. Pero en este caso tambien el arco AB debe coincidir con el arco DE; porque si estos dos arcos no se confundiesen en uno solo, habria en uno ó en otro puntos que no equidistasen del centro, lo que es imposible: luego el arco AB es igual al arco DE.

2.° Si suponemos AB = DE: digo que los dos ángulos ACB y DCE serán iguales. Porque si no lo son, sea ACB el mayor, y tómese ACI = DCE. Tendremos, segun lo que se acaba de demostrar, AI = DE; pero por suposicion el arco AB = DE: luego AI = AB, ó la parte igual al todo, lo que es un absurdo: luego el ángulo ACB = DCE.

PROPOSICION XVI.

TEOREMA.

Fig. 62. *En un mismo círculo, ó en círculos iguales, si dos ángulos del centro* ACB, DCE *estan entre sí en razon de dos números enteros, los arcos interceptados estarán en la misma razon, y tendremos esta proporcion.*

Angulo ACB : áng. DCE :: arco AB : arc. DE.

Supongamos, por exemplo, que los ángulos ACB, DCE siguen la razon de 7 á 4; ó lo que es lo propio, supongamos que el ángulo M, que hace veces de comun divisor, es siete veces menor que el ángulo ACB, y quatro veces menor que el ángulo DCE. Siendo iguales entre sí los ángulos parciales ACm, mCn, nCp, &c., DCx, xCy, &c., los arcos parciales Am, mn, np, &c., Dx,
* 15. xy, &c. lo serán tambien*: luego el arco total AB será al arco total DE, como 7 á 4. Pero es evidente que lo mismo se verificaria poniendo en lugar de 7 y 4 otros números qualesquiera: luego si se puede expresar en números enteros la razon de los ángulos ACB, DCE, los arcos AB, DE estarán en la misma razon que dichos ángulos.

Escolio. Recíprocamente, si los arcos AB, DE siguen la razon de dos números enteros, los ángulos ACB, DCE estarán en la misma razon, y siempre se verificará ACB : DCE :: AB : DE; porque los arcos parciales

Am, mn, &c., Dx, xy, &c. son iguales, y deben serlo por consiguiente los ángulos parciales ACm, mCn, &c. DCx, xCy, &c.

PROPOSICION XVII.

TEOREMA.

Sea qual fuere la razon entre dos ángulos ACB, ACD, *siempre será la misma que la de sus arcos* AB, AD, *interceptados entre sus lados, y descritos desde sus vértices como centros con radios iguales.* Fig. 63.

Supongamos el ángulo menor puesto en el mayor. Si no se verifica la proporcion mencionada, el ángulo ACB será al ángulo ACD como el arco AB es á un arco mayor ó menor que AD. Supongamos que sea mayor, y representémosle por AO; tendremos

Ang. ACB : áng. ACD : : arc. AB : arc. AO.

Imaginemos dividido el arco AB en partes iguales, cada una de las quales sea menor que DO; habrá á lo ménos un punto de division entre D y O. Sea I este punto, y tírese CI. Los arcos AB, AI seguirán la razon de dos números enteros, y tendremos en virtud del teorema anterior:

Ang. ACB : áng. ACI : : arc. AB : arc. AI.

Nótese que en estas dos proporciones son los mismos los antecedentes, y por consiguiente los consecuentes serán proporcionales, y así:

Ang. ACD : áng. ACI : : arc. AO : arc. AI.

Pero el arco AO es mayor que el arco AI: luego seria menester, para que subsistiese la proporcion, que el ángulo ACD fuese mayor que el ángulo ACI; pero es así que es menor: luego es imposible que el ángulo ACB sea el ángulo ACD, como el arco AB es á un arco mayor que AD.

Por un método enteramente parecido se demostraria que el quarto término de la proporcion no puede ser menor que AD: luego es el mismo AD, y tenemos la proporcion.

Áng. ACB : áng. ACD :: arc. AB : arc. AD.

Corolario. Ya que el ángulo formado en el centro del círculo, y el arco interceptado por sus lados tienen tal conexîon entre sí, que quando uno de ellos aumenta ó disminuye en una razon qualquiera, tambien el otro aumenta ó disminuye en la misma razon, podemos establecer una de estas cantidades para medida de la otra; así tomaremos en adelante el arco AB para medida del ángulo ACB. Lo único que hay que observar al comparar los ángulos entre sí es, que los arcos que les sirven de medida esten descritos con radios iguales; porque en este supuesto hemos tratado todas las proposiciones anteriores.

Escolio I. Parece mas natural medir una cantidad por otra de su misma especie, y baxo este principio convendrá comparar todos los ángulos al recto. De este modo, siendo el ángulo recto la unidad de medida, un ángulo agudo se expresaria por un número comprehendido entre o y 1, y un obtuso por otro comprehendido entre 1 y 2. Pero este modo de expresar los ángulos no seria muy cómodo para el uso; se ha visto que es mas sencillo medirlos con arcos de círculo, por lo fácil que es hacer arcos iguales á arcos dados, y por otras muchas razones. Por lo demas, si la medida de los ángulos por arcos de círculo es en cierto modo indirecta, es sumamente fácil sacar por este medio la medida directa y absoluta; porque comparando el arco que mide á un ángulo con el quadrante de la circunferencia, tendremos la razon del ángulo dado al recto, que es la medida absoluta.

Escolio II. Quanto se ha demostrado en las tres proposiciones antecedentes para la comparacion de los ángulos con los arcos, se verifica igualmente en la de los sectores con los arcos; porque los sectores son iguales quando lo son los ángulos, y generalmente son proporcionales á estos: luego *dos sectores* ACB, ACD, *toma-*

dos en un mismo círculo ó en círculos iguales, estan entre sí como los arcos AB, AD, *bases de estos mismos sectores.*

Aquí se ve que los arcos de círculo, que sirven para medir los ángulos, pueden servir tambien para medida de los diferentes sectores de un mismo círculo ó de círculos iguales.

PROPOSICION XVIII.

TEOREMA.

El ángulo inscrito BAD *tiene por medida la mitad del arco* BD *comprehendido entre sus lados.* Fig. 64.

Supongamos desde luego que el centro del círculo esté situado en el ángulo BAD.

Tírese el diámetro AE, y los radios CB, CD.

El ángulo BCE, externo del triángulo ABC, es igual á la suma de los internos CAB, ABC *; pero siendo isósceles el triángulo BAC, el ángulo CAB=ABC: luego el ángulo BCE es duplo de BAC. El ángulo BCE, como ángulo del centro, tiene por medida el arco BE: luego la medida del ángulo BAC será la mitad de BE. Por una razon semejante, el ángulo CAD tendrá por medida la mitad de ED: luego BAC+CAD, ó BAD tendrá por medida la mitad de BE+ED, ó la mitad de BD. * 20. 1.

Supongamos en segundo lugar que el centro C está fuera del ángulo BAD.

Tirando en tal caso el diámetro AE, el ángulo BAE tendrá por medida la mitad de BE, el ángulo DAE la mitad de DE: luego su diferencia BAD tendrá por medida la mitad de BE ménos la mitad de ED, ó la mitad de BD. Fig. 65.

Luego la medida de qualquiera ángulo inscrito es la mitad del arco que abrazan sus dos lados.

Corolario I. Todos los ángulos BAC, BDC, &c., inscritos en el mismo segmento, son iguales, porque Fig. 66.

tienen por medida la mitad del arco BOC.

Fig. 67. II. Todo ángulo BAD, inscrito en el semicírculo, es un ángulo recto, porque tiene por medida la mitad de la semicircunferencia BOD, ó la quarta parte de toda la circunferencia.

Para demostrar esto mismo de otro modo, tírese el radio AC. Por ser isósceles el triángulo BAC, el ángulo BAC = ABC; tambien es isósceles el triángulo CAD, luego el ángulo CAD = ADC: luego BAC + CAD, ó BAD = ABD + ADB; pero si los dos ángulos B y D del triángulo ABD valen juntos el tercero BAD, los tres valdrán dos veces el ángulo BAD; valen ademas dos rectos: luego el ángulo BAD es un ángulo recto.

Fig. 66. III. Todo ángulo BAC, inscrito en un segmento mayor que el semicírculo, es agudo, porque su medida es la mitad del arco BOC menor que una semicircunferencia.

Y todo ángulo BOC, inscrito en un segmento menor que el semicírculo, es un ángulo obtuso, porque tiene por medida la mitad del arco BAC mayor que una semicircunferencia.

Fig. 68. IV. Los ángulos opuestos A y C de un quadrilátero inscrito ABCD valen juntos dos rectos, porque la medida del ángulo BAD es la mitad del arco BCD, la del ángulo BCD es la mitad del arco BAD: luego los dos ángulos BAD, BCD tienen juntos por medida la mitad de la circunferencia: luego su suma vale dos rectos.

PROPOSICION XIX.

TEOREMA.

Fig. 69. *El ángulo* BAC, *formado por una tangente y una cuerda, tiene por medida la mitad del arco* ADC *comprehendido entre sus lados.*

Al punto de contacto A tírese el diámetro AD.

El ángulo BAD es recto *, y tiene por medida la mitad de la semicircunferencia AMD; la medida del ángulo verdadero DAC es la mitad de DC: luego la medida de BAD + DAC, ó de BAC es la mitad de AMD mas la mitad de DC, ó la mitad del arco entero ADC. * Pr. 9.

Igualmente se demostraria que la medida del ángulo CAE es la mitad del arco AC, que sus lados abrazan.

Problemas relativos á los dos primeros libros.

PROBLEMA I.

Dividir la recta dada AB *en dos partes iguales.* Fig. 70.

Desde los puntos A y B, como centros, con un radio mayor que la mitad de AB, descríbanse dos arcos que se corten en D, cuyo punto equidistará de A y B; señalese ademas encima ó debaxo de la línea AB un segundo punto E igualmente distante de A y B, y tírese por los dos puntos D, E la recta DE: digo que DE cortará á la línea AB en dos partes iguales en el punto C.

Porque equidistando cada uno de los puntos D y E de los extremos A y B, deben hallarse ambos en la perpendicular levantada en la mitad de AB. Pero por dos puntos dados solo puede pasar una línea recta: luego la línea DE será esta misma perpendicular, que corta á la AB en dos partes iguales en el punto C.

PROBLEMA II.

Por un punto A, *dado en la línea* AB, *levantar una perpendicular á dicha línea.* Fig. 71.

Tómense los puntos B y C á igual distancia de A; desde ellos, como centros, y con un radio mayor que

BA, trácense dos arcos que se corten en D, y tírese finalmente AD, que será la perpendicular que se pide.

Porque el punto D, por estar á igual distancia de B y de C, pertenece á la perpendicular levantada en la mitad de BC: luego AD es esta perpendicular.

Escolio. Esta misma construccion sirve para hacer un ángulo recto BAD en un punto dado A en una línea determinada BC.

PROBLEMA III.

Fig. 72. *Tirar una perpendicular á una recta dada* BD *desde un punto* A, *fuera de ella.*

Desde el punto A, como centro, y con un radio suficiente, trácese un arco que corte á la línea BD en dos puntos B y D; señálese luego un punto E, equidistante de B y D, y tírese AE, que será la perpendicular pedida.

Porque los dos puntos A y E estan cada uno á igual distancia de B y D: luego la recta AE es perpendicular en la mitad de BD.

PROBLEMA IV.

Fig. 73. *En el punto* A *de la línea* AB *formar un ángulo igual al dado* K.

Desde el vértice K, como centro, y con un radio arbitrario, descríbase el arco IL, terminado en los dos lados del ángulo; desde el punto A, como centro, y con un radio AB = KI, trácese el arco indefinido BO. Tómese luego un radio igual á la cuerda LI, y desde el punto B, como centro, trácese con este radio un arco que corte en D al arco indefinido BO; tírese finalmente AD, y el ángulo DAB será igual al dado K.

Porque los dos arcos BD, IL tienen radios y cuerdas
* 4. 2. iguales: luego son iguales *, y por consiguiente el ángulo BAD = IKL.

PROBLEMA V.

Dividir un ángulo ú arco dado en dos partes iguales. Fig. 74.

1.° Si se trata de dividir el arco AB en dos partes iguales, desde los puntos A y B, como centros, y con un mismo radio, trácense dos arcos que se corten en D; por el punto D y el centro C tírese CD, que cortará al arco AB en dos partes iguales en el punto E.

Porque los dos puntos C y D estan cada uno igualmente distantes de los extremos A y B de la cuerda AB: luego la línea CD es perpendicular en la mitad de esta cuerda: luego divide al arco AB en dos partes iguales en el punto E. * *6. 2.

2.° Para dividir el ángulo ACB en dos partes iguales, empezaremos trazando desde el vértice C, como centro, el arco AB, y lo demas, como acabamos de decir. Claro está que la línea CD dividirá al ángulo ACB en dos partes iguales.

Escolio. Esta misma construccion puede servir para dividir cada una de las mitades AE, EB en dos partes iguales; de este modo se dividirá un arco ó ángulo por subdivisiones succesivas en quatro, ocho, diez y seis, &c. partes iguales.

PROBLEMA VI.

Por un punto dado A tirar una paralela á la línea dada BC. Fig. 75.

Desde el punto A, como centro, y con un radio suficiente, trácese el arco indefinido EO. Desde el punto E, como centro, descríbase con el mismo radio el arco AF, tómese ED=AF, y tírese AD, que será la paralela pedida.

Porque tirando AE, vemos que los ángulos alternos AEF, EAD son iguales: luego las rectas AD, EF son paralelas. * *25. 1.

PROBLEMA VII.

Fig. 76. *Dados dos ángulos* A y B *en un triángulo, hallar el tercero.*

Tírese la línea indefinida DEF; hágase en el punto E el ángulo DEC=A, y el ángulo CEH=B: digo que el ángulo restante HEF será el tercero pedido.

Porque estos tres ángulos valen juntos dos rectos.

PROBLEMA VIII.

Trazar un triángulo, dados sus dos lados B y C, *y*
Fig. 77. *el ángulo comprehendido* A.

Habiendo tirado la línea indefinida DE, hágase en el punto D el ángulo EDF=A, tómese despues DG=B, DH=C, y tírese GH; DGH será el triángulo pedido.

PROBLEMA IX.

Describir un triángulo dado un lado y dos ángulos.

Los dos ángulos dados serán, ó ambos adyacentes al lado dado, ó adyacente el uno, y opuesto el otro. En este último caso búsquese el tercero, y tendremos de este modo los dos ángulos adyacentes. Esto sentado, tí-
Fig. 78. rese la recta DE igual al lado dado; hágase en el punto D el ángulo EDF igual á uno de los adyacentes, y en el punto E el ángulo DEG igual al otro; las dos líneas DF, EG se cortarán en H, y DEH será el triángulo pedido.

PROBLEMA X.

Trazar un triángulo dados sus tres lados A, B, C.

Fig. 79. Tírese DE igual al lado A; desde el punto E, como centro, y con un radio igual al segundo lado B, descríbase un arco. Desde el punto D, como centro, y con un radio igual al tercer lado C, descríbase otro

arco, que corte al primero en F; tírese DF, EF, y DEF será el triángulo pedido.

Escolio. Si uno de los lados fuese mayor que la suma de los otros dos, no se cortarian los arcos; pero siempre será posible la resolucion, con tal que la suma de dos lados qualesquiera sea mayor que el tercero.

PROBLEMA XI.

Trazar un triángulo dados dos lados A y B, *y el ángulo opuesto* C. Fig. 80.

Hay dos casos: 1.°, si el ángulo C es recto ú obtuso, hágase igual á él el ángulo EDF; tómese DE = A; desde el punto E, como centro, y con un radio igual al lado dado B: trácese un arco, que corte en F á la línea DF; tírese EF, y DEF será el triángulo pedido.

En este primer caso es menester que el lado B sea mayor que A, porque siendo recto ú obtuso el ángulo C, es el mayor de los ángulos del triángulo: luego el lado opuesto debe ser tambien el mayor.

2.° Si el ángulo C es agudo, y B es mayor que A, se verifica la misma construccion, y es DEF el triángulo pedido. Fig. 81.

Pero si, siendo agudo el ángulo C, el lado B es menor que A, entónces el arco descrito desde el centro E con el radio EF = B, cortará al lado DF en dos puntos F y G, situados al mismo lado de D: luego habrá dos triángulos DEF, DEG, que satisfarán igualmente el problema. Fig. 82.

Escolio. Seria imposible el problema en todos casos, si el lado B fuese menor que la perpendicular tirada á la línea DF desde el punto E.

PROBLEMA XII.

Fig. 83. *Dados los lados adyacentes* A y B *de un paralelógramo, y el ángulo* C *que comprehenden, formar el paralelógramo.*

Tírese la línea DE=A, hágase en el punto D el ángulo FDE=C, tómese DF=B; descríbanse dos arcos, uno desde el punto F como centro, y con el radio FG=DE, y el otro desde el punto E como centro, y con un radio EG=DF. Tírense al punto G, comun interseccion de estos dos arcos, las rectas FG, EG; y DEGF será el paralelógramo pedido.

Porque segun la construccion, los lados opuestos son
* 19. 1. iguales: luego la figura descrita es un paralelógramo *, que está formado con las líneas y el ángulo dado.

Corolario. Si el ángulo dado es recto, la figura será un rectángulo; y si además son iguales los lados, será un quadrado.

PROBLEMA XIII.

Fig. 84. *Hallar el centro de un círculo ó de un arco dado.*

Tómense en la circunferencia ó en el arco tres puntos qualesquiera A, B, C; tírense ó imagínense tiradas las rectas AB y BC, divídanse estas dos líneas en dos partes iguales con las perpendiculares DE, FG; el punto O, donde se encuentran estas perpendiculares, será el centro que buscamos.

Escolio. La misma construccion sirve para hacer pasar una circunferencia por los tres puntos dados A. B, C; y tambien para trazar una circunferencia en que quede inscrito el triángulo dado ABC.

PROBLEMA XIV.

Por un punto determinado tirar una tangente á un círculo dado.

Si el punto dado A está en la circunferencia, tírese el radio CA, y á este la perpendicular AD, que será la tangente pedida.* Fig. 85. * 9. 2.

Si el punto A está fuera del círculo, tírese por el punto A, y el centro la línea recta CA; divídase CA en dos partes iguales en el punto O, desde el punto O, como centro, y con el radio OC, descríbase una circunferencia que corte á la dada en el punto B; tírese la recta AB, y esta será la tangente pedida. Fig. 86.

Porque tirando la línea CB, el ángulo CBA, inscrito en el semicírculo, es recto*: luego AB es perpendicular en la extremidad del radio CB: luego es tangente. * 18. 2.

Escolio. Quando el punto A está fuera del círculo, se ve que siempre hay dos tangentes iguales AB, AD que pasan por este punto. Son iguales porque los triángulos rectángulos CBA, CDA tienen comun la hypotenusa CA, y el lado CB=CD: luego son iguales*: luego AD=AB, y tambien el ángulo CAD=CAB. * 18. 1.

PROBLEMA XV.

Inscribir un círculo en un triángulo dado ABC.

Divídanse los ángulos A y B en dos partes iguales con las líneas AO y BO, que se encontrarán en O; desde este punto tírense á los tres lados del triángulo las perpendiculares OD, OE, OF: digo que estas perpendiculares serán iguales entre sí.

Porque, por construccion, el ángulo DAO=OAF, el ángulo recto ADO=AFO: luego los terceros AOD y AOF son iguales. Además el lado AO es comun á los dos triángulos AOD, AOF, y los ángulos adyacentes al lado igual son iguales, y por lo mismo DO=OF. Del mismo modo se probará que son iguales los dos triángulos BOD, BOE: luego OD=OE: luego las tres perpendiculares son iguales entre sí.

Ahora, si desde el punto O, como centro, y con el radio OD, trazámos una circunferencia, claro está que dicha circunferencia estará inscrita en el triángulo ABC. Porque el lado AB, perpendicular en el extremo del radio OD, es una tangente, y lo mismo sucede con los lados BC, AC.

Escolio. Las tres rectas, que dividen en dos partes iguales á los tres ángulos, concurren en un mismo punto.

PROBLEMA XVI.

Fig. 88. y 89. *Sobre una recta dada* AB *describir un segmento capaz del ángulo dado* C, *esto es, un segmento tal, que todos los ángulos inscritos en él sean iguales al ángulo dado* C.

Prolónguese AB hácia D, hágase en el punto B el ángulo DBE = C; tírese BO perpendicular á BE y GO perpendicular en la mitad de AB; desde el punto de encuentro O, como centro, y con el radio OB, trácese un círculo, y AMB será el segmento pedido.

Porque BF, siendo perpendicular en la extremidad del radio OB, es una tangente, y el ángulo ABF tiene por medida la mitad del arco AKB *. Ademas el ángulo
* 19. 2. AMB, como ángulo inscrito, tiene tambien por medida la mitad del arco AKB: luego el ángulo AMB = ABF = EBD = C: luego todos los ángulos inscritos en el segmento AMB son iguales al dado C.

Escolio. Si el ángulo dado fuese recto, el segmento que buscamos seria el semicírculo trazado sobre el diámetro AB.

PROBLEMA XVII.

Fig. 90. *Hallar la razon numérica de dos líneas rectas dadas* AB, CD, *siempre que tengan entre sí un comun divisor.*

Llévese la menor CD sobre la mayor AB tantas veces como quepa; dos veces, por exemplo, con el residuo BE.

Llévese el residuo BE sobre la línea CD tantas veces como quepa; una vez, por exemplo, con la resta DF.

Llévese la segunda resta DF sobre la primera BE tantas veces como quepa; una vez, por exemplo, con el residuo BG.

Llévese el tercer residuo BG sobre el segundo DF tantas veces como quepa.

Contínuese así hasta que resulte un residuo que quepa en su anterior un número cabal de veces.

Entónces este último residuo será el comun divisor de las líneas propuestas, y considerándole como la unidad, se hallarán fácilmente los valores de las rectas antecedentes; y finalmente los de las líneas propuestas, de donde se deducirá su razon en números.

Por exemplo, si hallamos que GB cabe dos veces cabales en FD, BG será el comun divisor de las dos líneas propuestas. Sea $BG=1$, tendremos $FD=2$; pero EB contiene una vez á FD mas GB: luego $EB=3$; CD contiene una vez á EB mas FD: luego $CD=5$; y finalmente AB contiene dos veces á CD mas EB: luego $AB=13$: luego la razon entre las dos líneas AB y CD es la de 13 á 5. Si tomasemos la línea CD por unidad, la línea AB seria $\frac{13}{5}$; y si AB fuese la unidad, seria $CD=\frac{5}{13}$.

Escolio. El método que acabamos de explicar es el mismo que enseña la aritmética para hallar el máxîmo comun divisor de dos números, y así no necesita demostracion alguna.

Es muy posible que, por mas que se continúe la operacion, jamas se halle un residuo que quepa un número cabal de veces en su antecedente. Entónces las dos líneas no tienen comun divisor, y son lo que llamamos *incomensurables*; en breve veremos un exemplo de esto en la razon de la diagonal al lado del quadrado. En tal caso no se puede hallar exâctamente la razon en números; pero despreciando el último residuo, daremos con una razon mas ó ménos aproxîmada, segun se haya continuado mas ó ménos la operacion.

PROBLEMA XVIII.

Fig. 91. *Dados dos ángulos* A y B *hallar su comun divisor, si le tienen, y luego su razon numérica.*

Descríbanse con radios iguales los arcos CD y EF, gue miden estos ángulos; comparemos luego estos arcos como en el problema anterior, porque podemos sobreponer un arco á otro del mismo radio como una línea recta á otra línea recta. Daremos de este modo con el comun divisor de los arcos CD y EF, si le tienen, y con su razon numérica. Esta razon será la misma que la de los ángulos dados *; y si DO es el comun divisor de los arcos DAO será el de los ángulos.

* 17. 2.

Escolio. Así podemos hallar el valor absoluto de un ángulo, comparando el arco que le sirve de medida con toda la circunferencia; por exemplo, si el arco CD es á la circunferencia como 3 es á 25, el ángulo A será los $\frac{3}{25}$ de quatro ángulos rectos, ó $\frac{12}{25}$ de un recto.

Puede suceder tambien que los arcos que comparamos no tengan comun divisor; en tal caso solo tendremos para los ángulos razones numéricas mas ó ménos aproxîmadas, segun se haya continuado mas ó ménos la operacion.

LIBRO III.

PROPORCIONALIDAD DE LAS FIGURAS.

DEFINICIONES.

I. Llamaré *figuras equivalentes* á las que son iguales en superficie.

Dos figuras pueden ser equivalentes, aunque sean muy desemejantes; un círculo, por exemplo, puede ser equivalente á un quadrado; un triángulo á un rectángulo, &c.

Conservaremos la denominacion de figuras iguales para las que, sobrepuestas una á otra, coinciden en todos sus puntos: tales son dos círculos, cuyos radios sean iguales; dos triángulos, cuyos tres lados sean respectivamente iguales, &c.

II. Dos figuras son *semejantes*, quando tienen sus ángulos iguales cada uno al suyo, y los lados *homólogos* proporcionales. Por lados homólogos entendemos los que estan situados de un mismo modo en ambas figuras, ó que estan adyacentes á ángulos iguales. Estos mismos ángulos se llaman tambien *ángulos homólogos.*

Dos figuras iguales siempre son semejantes; pero dos figuras semejantes pueden ser muy desiguales.

III. En dos círculos diferentes llamamos *arcos semejantes*, *sectores semejantes*, *segmentos semejantes* á los que corresponden á ángulos del centro iguales.

Fig. 92. Así siendo el ángulo A igual al ángulo O, el arco BC es semejante al arco DE, el sector ABC al sector ODE, &c.

Fig. 93. IV. La *altura* de un paralelógramo es la perpendicular EF, que mide la distancia de los dos lados ó *bases* opuestas AB, CD.

Fig. 94. V. La *altura* de un triángulo es la perpendicular AD tirada desde el vértice de un ángulo A al lado opuesto BC, que llamamos la *base*.

Fig. 95. VI. La *altura* del trapecio es la perpendicular EF tirada entre sus dos *bases* paralelas AB, CD.

VII. El *área* ó la superficie de una figura son términos casi sinónimos. El área denota mas particularmente la cantidad superficial de la figura, en tanto que está medida ó comparada con otras superficies.

N. B. Para la inteligencia de este libro y de los siguientes es preciso tener presente la teoría de las proporciones, para lo qual se puede recurrir á los tratados ordinarios de aritmética y álgebra. Solo haremos una observacion, que es muy importante para determinar el verdadero sentido de las proposiciones, y disipar toda la obscuridad ya en la cabeza de la proposicion, ya en la demostracion.

Si tenemos la proporcion $A : B :: C : D$, sabemos que el producto de los extremos $A \times D$ es igual al de los medios $B \times C$.

Esta verdad es incontestable con números, y lo es tambien con dos cantidades qualesquiera, con tal que se expresen ó imaginen expresadas en números, y esto siempre se puede suponer. Si A, B, C, D, por exemplo, son líneas, podemos imaginar que una de estas quatro líneas, ó una quinta, si queremos, sirve á todas de comun divisor, y hace veces de unidad; entónces A, B, C, D representan cada una un cierto número de unidades, entero ó quebrado, comensurable ó incomensurable, y la proporcion entre las líneas A, B, C, D se convierte en una proporcion numérica.

El producto de las líneas A y D, que tambien se llama su rectángulo, no es pues otra cosa que el número de unidades lineales contenidas en A multiplicado por el número de unidades lineales contenidas en D; y se concibe facilmente que este producto puede y debe ser igual al que de un modo semejante resulta de las líneas B y C.

Las cantidades A y B pueden ser de una especie, líneas, por exemplo; y las cantidades C y D de otra especie, superficies, por exemplo. En tal caso es preciso mirar siempre estas cantidades como números: A y B se expresarán en unidades lineales, C y D en unidades superficiales, y el producto $A \times D$ será un número como el producto $B \times C$.

En general, en todas las operaciones que hagamos en las proporciones, debemos mirar siempre sus términos como otros tantos números, cada qual de la especie que le conviene, y no nos costará trabajo alguno comprehender estas operaciones, y las consecuencias que de ellas resulten.

Debemos advertir tambien que muchas de nuestras denominaciones estan fundadas en varias de las reglas mas sencillas del álgebra, que estriban tambien en axîomas conocidos. Así, si tenemos $A=B+C$, y multiplicamos cada miembro por una misma cantidad M, sacaremos $A \times M = B \times M + C \times M$. Del mismo modo, si tenemos $A=B+C$, y $D=E-C$, y sumamos las cantidades iguales, borrando $+C$ y $-C$, que se destruyen, sacaremos $A+D=B+E$; y así en los demas Todo esto es evidente de suyo; pero en caso de duda, bueno será consultar los libros de álgebra, y combinar así el estudio de las dos ciencias.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Los paralelógramos, que tienen bases y alturas iguales, son equivalentes.

Fig. 96. Sea AB la base comun de los dos paralelógramos ABCD, ABEF.

Ya que hemos supuesto que estos paralelógramos son de una misma altura, las bases superiores DC, FE estarán situadas en una misma línea paralela á AB. Pero tenemos por la naturaleza de los paralelógramos AD=BC, y AF=BE; por la misma razon es DC=AB, y FE=AB: luego DC=FE: luego quitando DC y FE de la misma línea DE, las rectas CE y DF serán iguales. Síguese de aquí que los triángulos DAF, CBE son equiláteros entre sí, y por consiguiente iguales.* (* 11. 1.)

Pero si del quadrilátero ABDE restamos el triángulo ADF, queda el paralelógramo ABEF; y si del mismo quadrilátero ABED quitamos el triángulo CBE, queda el paralelógramo ABCD: luego los dos paralelógramos ABCD y ABEF, que tienen la misma base y altura son equivalentes.

Fig. 97. *Corolario.* Todo paralelógramo ABCD es equivalente al rectángulo ABEF de igual base y altura.

PROPOSICION II.

TEOREMA.

Fig. 98. *Todo triángulo* ABC *es la mitad del paralelógramo* ABCD, *que tiene la misma base y altura.*

* 31. 1. Porque los triángulos ABC, ACD son iguales.*

Corolario I. Luego un triángulo ABC es la mitad del rectángulo BCEF, que tiene la misma base BC, é igual altura AO; porque el rectángulo BCEF es equivalente al paralelógramo ABCD.

Corolario II. Todos los triángulos, que tienen bases y alturas iguales, son equivalentes.

PROPOSICION III.

TEOREMA.

Dos rectángulos de una misma altura siguen entre sí la razon de sus bases.

Sean ABCD, AEFD dos rectángulos, cuya altura comun es AD: digo que estan entre sí como sus bases AB, AE. Fig. 99.

Supongamos primeramente que las bases AB, AE sean comensurables entre sí, y que esten, por exemplo, en la razon de los números 7 y 4. Si dividimos AB en siete partes iguales, AE contendrá quatro de ellas; levántese en cada punto de division una perpendicular á la base, y se formarán así siete rectángulos parciales, que serán iguales entre sí por tener la misma base y altura. El rectángulo ABCD contendrá siete rectángulos parciales, miéntras que en AEFD habrá quatro: luego el rectángulo ABCD es al rectángulo AEFD como 7 es á 4, ó como AB á AE. Esto mismo se puede aplicar á otra razon qualquiera, que no sea la de 7 á 4: luego, sea qual fuere esta razon, siempre tendremos, con tal que sea comensurable,

$$ABCD : AEFD :: AB : AE.$$

Supongamos, en segundo lugar, que las bases AB, AE sean incomensurables entre sí: digo que tambien se verificará: Fig. 100.

$$ABCD : AEFD :: AB : AE.$$

Porque si esta proposicion es incierta, permaneciendo los mismos los tres primeros términos, el quarto será mayor ó menor que AE. Supongamos que sea mayor, y que sea

ABCD : AEFD : : AB : AO.

Divídase la línea AB en partes iguales menores que EO, y habrá á lo ménos un punto de division I entre E y O: en este punto levántese la perpendicular IK; las bases AB y AI serán comensurables entre sí, y tendremos por lo que acabamos de demostrar

ABCD : AIKD : : AB : AI.

Pero tenemos por hypótesis

ABCD : AEFD : : AB : AO.

En estas dos proporciones los antecedentes son iguales: luego los consecuentes son proporcionales, y resulta

AIKD : AEFD : : AI : AO.

Pero AO es mayor que AI: luego, para que subsistiese esta proporcion, seria menester que el rectángulo AEFD fuese mayor que AIKD; pero, todo al contrario, AEFD es menor: luego la proporcion es imposible: luego ABCD no puede ser á AEFD, como AB es á una línea mayor que AE.

Por un razonamiento, enteramente parecido, se probaria que el quarto término de la proporcion no puede ser menor que AE: luego es igual á dicho AE.

Luego, sea qual se fuere la razon de las bases, dos rectángulos ABCD, AEFD de una misma altura, siguen la razon de sus bases AB, AE.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

Fig. 101. *Dos rectángulos qualesquiera* ABCD, AEGF *estan entre sí como los productos de bases y alturas, de modo que tenemos* ABCD : AEGF : : AB × AD : AE × AF.

Habiendo dispuesto los dos rectángulos de modo que los ángulos en A esten opuestos por el vértice, prolónguense los lados GE, CD hasta que se encuentren en H.

Los dos rectángulos ABCD, AEHD tienen una misma altura DA, y estan entre sí como sus bases AB, AE. Igualmente los rectángulos AEHD, AEGF tienen una misma altura AE, y estan por consiguiente como sus bases AD y AF. Así tendremos estas dos proporciones

$$ABCD : AEHD :: AB : AE.$$
$$AEHD : AEGF :: AD : AF.$$

Multiplicándolas ordenadamente, y observando que el término medio AEHD puede omitirse como multiplicador comun al antecedente y al consecuente, tendremos

$$ABCD : AEGF :: AB \times AD : AE \times AF.$$

Escolio. Luego podemos tomar por medida de un rectángulo el producto de su base por su altura, con tal que se entienda por este producto el de dos números, que son el número de unidades lineales contenidas en la base, y el número de unidades lineales contenidas en la altura.

Ademas esta medida no es absoluta, si no solamente relativa; supone que se valúa otro rectángulo de un modo semejante, midiendo sus lados por la misma unidad lineal Sacamos así un segundo producto, y la razon de estos dos productos es igual á la de los rectángulos, segun la proposicion que acabamos de demostrar.

Por exemplo, si la base del rectángulo A es de tres unidades, y su altura de diez, el rectángulo estará representando por el número 3×10, ó 30; número que, así aislado, nada significa. Pero si tenemos otro rectángulo B, cuya base sea de 12 unidades, y su altura de 7, este nuevo rectángulo estará representado por el número 7×12, ó 84. De aquí concluiremos que los dos rectángulos A y B estan entre sí como 30 es á 84: luego conviniendo en tomar el rectángulo A por unidad de medida en las superficies, el rectángulo B tendria entónces por medida absoluta $\frac{84}{30}$, esto es, que seria igual $\frac{84}{30}$ de unidades superficiales.

Es mas comun y mas sencillo tomar el quadrado por unidad de superficie, y se escoge el quadrado, cu-

yo lado es la unidad en longitud; entónces la medida que hemos considerado simplemente como relativa, se muda en absoluta. Por exemplo, el número 30, que
Fig. 102. nos ha servido para medida del rectángulo A, representa 30 unidades superficiales, ó 30 de estos quadrados, cuyo lado es igual á la unidad. Esto se ve palpablemente en la figura 102.

Comunmente se usa indistintamente en la Geometría el producto de dos líneas por su *rectángulo*, y aun ha pasado esta expresion á la aritmética para señalar el producto de dos números desiguales, así como se emplea la de *quadrado* para expresar el producto de un número multiplicado por sí mismo.

Los quadrados de los números 1, 2, 3, &c. son 1, 4, 9, &c. Así vemos que el quadrado formado sobre una línea dupla es quadruplo; sobre una línea tri-
Fig. 103. ple quatro veces mayor, y así sucesivamente.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

El área de un paralelógramo qualquiera es igual al producto de su base por su altura.

Fig. 97. Porque el paralelógramo ABCD es equivalente al rectángulo ABEF, que tiene la misma base AB é igual
* Pr. 1. altura BE *; pero este tiene por medida $AB \times BE$ **:
* Pr. 4. luego $AB \times BE$ es igual al área del paralelógramo ABCD.

Corolario. Los paralelógramos de una misma base estan entre sí como sus alturas, y los de una misma altura como sus bases; porque siendo A, B, C tres cantidades qualesquiera, tenemos generalmente $A \times C : B \times C :: A : B$.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

El área de un triángulo es igual al producto de su base por la mitad de su altura.

Porque el triángulo ABC es la mitad del paraleló-gramo ABCE, que tiene la misma BC y la misma altura AD *; pero la superficie del paralelógramo es BC×AD *: luego la del triángulo es ½BC×AD, ó BC ×½AD, ó ½ (BC×AD). Fig. 104. * Pr. 2. * Pr. 5.

Corolario. Dos triángulos de una misma altura siguen la razon de sus bases, y dos triángulos de una misma base siguen la de sus alturas.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

El área del trapecio ABCD *es igual á su altura* EF *multiplicada por la semisuma de las bases pararelas* AB, CD. Fig. 105.

Por el punto I, medio del lado CB, tírese KL paralela al lado opuesto AD, y prolónguese DC hasta que encuentre á KL.

En los triángulos IBL, ICK tenemos el lado IB=IC por construcion, el ángulo LIB=CIK, y el ángulo IBL=IKC, por ser CK y BL paralelas *: luego estos triángulos son iguales *: luego el trapecio ABCD es equivalente al paralelógramo ADKL, y su medida es EF×AL. * 25. 1. * 7. 1.

Pero tenemos AL=DK, y por ser los triángulos IBL y KCI iguales el lado BL=CK: luego AB+CD=AL+DK=2AL, y así AL es la semisuma de las bases AB, CD. Luego finalmente el área del trapecio ABCD es igual á la altura EF, multiplicada por la semisuma de las bases AB y CD; esto es, $ABCD = EF \times \left(\frac{AB+CD}{2}\right)$.

Escolio. Si por el punto I, medio de BC, tiramos á la base AB la paralela IH, el punto H será tambien el medio de AD; porque la figura AHIL es un paralelógramo, lo mismo que DHIK, pues los lados opuestos son paralelos. Tenemos por consiguiente $AH = IL$, y $DH = IK$; pero $IL = IK$, por ser iguales los triángulos BIL y CIB: luego $AH = DH$.

Se puede reparar que la línea $HI = AL = \frac{AB+CD}{2}$: luegó el área del trapecio puede expresarse tambien por $EF \times HI$: luego es igual á la altura del trapecio, multiplicada por la línea tirada á distancias iguales de las bases paralelas.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

Fig. 106. *Si dividimos la línea* AC *en dos partes* AB y BC, *el quadrado de la línea entera* AC *es igual al quadrado de la una parte* AB, *mas el quadrado de la otra parte* BC, *mas dos veces el rectángulo de estas mismas partes* AB *y* BC, *ó lo que es todo uno*, $(AC)^2$ ó $(AB+BC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + 2(AB \times BC)$.

Constrúyase el quadrado ACDE, tómese $AF = AB$; tírese á AC la paralela FG, y á AE la paralela BH.

El quadrado ACDE está dividido en quatro partes; la primera ABIF es el quadrado formado sobre AB, pues hemos tomado $AF = AB$; la segunda IGDH es el quadrado formado sobre BC, pues por ser $AC = AE$, y $AB = AF$, la diferencia $AC - AB$ es igual á la diferencia $BE - AF$, lo que da $BC = EF$; pero por las paralelas tenemos $IG = AG$, y $DG = EF$: luego HIGD es igual al quadrado formado sobre BC. Quitando estas dos partes del quadrado, quedan los dos rectángulos BCGI, EFIH, que tienen cada uno por medida AB × BC. Luego *el quadrado formado sobre* AC, &c.

Escolio. Esta proposicion coincide con la que se demuestra en el álgebra para la formacion del quadrado de un binomio, y se expresa así: $(a+b)^2 = {}^2 + 2ab + b^2$.

PROPOSICION IX.

TEOREMA.

Si la línea AC *es la diferencia de las otras dos* AB Fig. 107.
BC, *el quadrado formado sobre* AC *será igual al quadrado de* AB, *mas el quadrado de* BC, *ménos dos veces el rectángulo de* AB *por* BC; *esto es*, $(AC)^2$ ó $(AB - BC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + 2(AB \times BC)$.

Constrúyase el quadrado ABIF, tómese AE = AC; tírese CF pararela á BI, HK paralela á AB, y conclúyase el quadrado EFLK.

Cada uno de los rectángulos CBIG, GLKD tiene por medida AB × BC; si los quitamos de la figura entera ABILKEA, cuyo valor es $(AB)^2 + (BC)^2$, claro está que quedará el quadrado ACDE: luego &c.

Escolio. Esta proposicion concuerda con la fórmula de álgebra $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

PROPOSICION X.

TEOREMA.

El rectángulo formado por la suma y la diferencia de dos lineas, es igual á la diferencia de los quadrados de dichas líneas; así tenemos $(AB + BC) \times (AB - BC) =$ Fig. 108.
$(AB)^2 - (BC)^2$.

Constrúyanse sobre AB y AC los quadrados ABIF, ACDE; prolónguese AB la cantidad BK=BC, y conclúyase el rectángulo AKLE.

La base AK del rectángulo es la suma de las dos líneas AB, BC; su altura es la diferencia de estas mismas líneas: luego el rectángulo AKLE=(AB+BC)×(AB—BC). Pero este mismo rectángulo se compone de las dos partes ABHE+BHLK, y la parte BHLK es igual al rectángulo EDGF, por ser BH=DE, BK=EF: luego AKLE=ABHE+EDGF. Pero estas dos partes forman el quadrado ABIF ménos el quadrado formado DHIG, que es el quadrado sobre BC: luego finalmente

$$(AB+BC)\times(AB-BC)=(AB)^2-(BC)^2.$$

Escolio. Esta proposicion coincide con la fórmula de álgebra $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

PROPOSICION XI.

TEOREMA.

El quadrado formado sobre la hypotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los quadrados formados sobre los otros dos lados.

Fig. 109. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Despues de haber formado los quadrados sobre los tres lados, báxese desde el ángulo recto á la hypotenusa la perpendicular AD, que se prolongará hasta E; tírense finalmente las diagonales AF, CH.

El ángulo ABF se compone del ángulo ABC y del recto CBF; el ángulo CBH se compone del mismo ABC y del recto ABH: luego el ángulo ABF=HBC. Pero AB=BH por ser lados de un mismo quadrado, y BF=BC por igual motivo: luego los triángulos ABF, HBC tienen un ángulo igual comprehendido entre lados iguales: luego son iguales.* (* 6. 1.)

El triángulo ABF es la mitad del rectángulo BDEF, que tiene la misma base BF, y la misma altura BD*. (* Pr. 2.) El triángulo HBC es igualmente la mitad del quadrado AH (1), porque siendo rectos los ángulos BAC y BAL, AC y AL solo forman una sola y misma línea recta paralela á HB: luego el triángulo HBC, y el quadrado AH, que tienen comun la base BH, tienen igualmente una misma altura AB: luego el triángulo es la mitad del quadrado.

Ya se ha probado que el triángulo ABF es igual al triángulo HBC, y por consiguiente el rectángulo BDEF, duplo del triángulo ABF, es equivalente al quadrado AH, duplo del triángulo HBC. Se demostrará igualmente que el rectángulo CDEG es equivalente al quadrado AI; pero los dos rectángulos BDEF, CDEF componen juntos el quadrado BG: luego el quadrado BG, formado sobre la hypotenusa, es igual á la suma de los quadrados BL, CH, formados sobre los otros dos lados, ó en otros términos $(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$.

Corolario I. Luego el quadrado de uno de los lados del ángulo recto es igual al quadrado de la hypotenusa ménos el quadrado del otro lado; ó, lo que es lo mismo, $(AB)^2=(BC)^2-(AC)^2$.

Corolario II. Sea ABCD un quadrado, AC su diagonal; siendo el triángulo ABC rectángulo é isósceles, tendremos $(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2=2\,(AB)^2$: luego *el quadrado formado sobre la diagonal* AC *de un triángulo rectángulo isósceles es duplo del formado sobre un lado* AB. Fig. 118.

Se puede demostrar esta propiedad, tirando por los puntos A y C paralelas á BD, y por los puntos B y D otras paralelas á AC; se formará de este modo un nuevo quadrado EFGH que será el formado sobre AC. Pero vemos que EFGH se compone de ocho triángulos iguales á ABE, y que ABCD se compone de quatro: luego el quadrado EFGH es duplo de ABCD.

(1) Este modo de nombrar un quadrilátero con solo las dos letras de su diagonal, es muy usado en casi todos los Autores, y nosotros tambien nos serviremos de él en varias ocasiones, á causa de su mayor brevedad. (*Nota del Traductor*).

Una vez que $(AC)^2 : (AB)^2 :: 2 : 1$, tenemos, sacando la raiz quadrada, $AC : AB :: \sqrt{2} : 1$: luego *la diagonal de un quadrado es incomensurable con su lado.*

Fig. 109. Esto lo aclararemos mas en otra ocasion.

Corolario III. Se ha demostrado que el quadrado AH es equivalente al rectángulo BDEF; pero á causa de la altura comun BF, el quadrado BCGF es al rectángulo BDEF como la base BC es á la base BD: luego $(BC)^2 : (AB)^2 :: BC : BD$.

Luego *el quadrado de la hypotenusa es al quadrado de uno de los lados del ángulo recto como la hypotenusa es al segmento adyacente á dicho lado.* Llámase aquí *segmento* la parte de la hypotenusa determinada por la perpendicular baxada desde el ángulo recto; así BD es el segmento adyacente al lado AB, y DC el segmento adyacente al lado AC. Tendremos de un modo semejante

$$(BC)^2 : (AC)^2 :: BC : CD.$$

Corolario IV. Los rectángulos BDEF, DCEG tienen tambien la misma altura, y por consiguiente siguen la razon de sus bases BD, CD. Pero estos rectángulos son equivalentes á los quadrados $(AB)^2$, $(AC)^2$: luego

$$(AB)^2 : (AC)^2 :: BD : DC.$$

Luego *los quadrados de los dos lados del ángulo recto estan entre sí como los segmentos de la hypotenusa adyacentes á dichos lados.*

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

Fig. 110. *En un triángulo* ABC: *siendo agudo el ángulo* C, *el quadrado del lado opuesto será menor que la suma de los quadrados de los lados que comprehenden dicho ángulo* C; *y si baxamos sobre* BC, *la perpendicular* AD, *la diferencia será igual al duplo del rectángulo* $BC \times CD$; *de modo que tendremos.*

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2BC \times CD.$$

Aquí hay dos casos. 1.° Si la perpendicular cae dentro del triángulo ABC, tendremos $BD = BC - CD$, y por consiguiente * $(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2BC \times CD$. * Pr. 9.
Añadiendo á una y otra parte $(AD)^2$, y observando que los triángulos rectángulos ABD, ADC dan $(AD)^2 + (BD)^2 = (BA)^2$, y $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$, resulta $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2BC \times CD$.

2.° Si la perpendicular AD cae fuera del triángulo ABC, tendremos $BD = CD - BC$, y por consiguiente * $(BD)^2 = (CD)^2 + (BC)^2 - 2CD \times BC$. Añadiendo á * 9.
una y otra parte $(AD)^2$, sacamos igualmente
$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2BC \times CD$.

PROPOSICION XIII.

TEOREMA.

En un triángulo ABC, *siendo obtuso el ángulo* C, *el quadrado del lado opuesto* AB *será mayor que la suma de los quadrados de los lados que comprehenden el ángulo* C, *y si baxamos sobre* BC *la perpendicular* AD, *la diferencia será igual al duplo del rectángulo* $BC \times CD$, *de modo que tendremos* Fig. 111.

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 + 2BC \times CD.$$

La perpendicular no puede caer dentro del triángulo, porque si cayese, por exemplo, en E, el triángulo ACE tendria á un tiempo un ángulo recto E y otro obtuso C, lo que es imposible *: luego cae por precision * 20. 1.
fuera, y tenemos $BD = BC + CD$. De aquí resulta * * Pr. 8.
$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 + 2BC \times CD$. Añadiendo á una y otra parte $(AD)^2$, y haciendo las reduciones como en el teorema anterior, deduciremos $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 + 2BC \times CD$.

Escolio. El triángulo rectángulo es el único en que se verifica que la suma de los quadrados de los catetos es igual al quadrado de la hypotenusa; porque si el ángulo comprehendido por dichos es agudo, la suma de sus quadrados será mayor que el quadrado del lado opuesto; y si es obtuso, esta suma será menor, cuyos dos casos acabamos de demostrar.

PROPOSICION XIV.

TEOREMA.

Fig. 112. *Si en un triángulo qualquiera* ABC *tiramos desde el vértice al medio de la base la recta* AE, *digo que tendremos* $(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AE)^2 + 2(BE)^2$.

Báxese á la base BC la perpendicular AD.

El triángulo AEC dará, segun el teorema XII,

$$(AC)^2 = (AE)^2 + (EC)^2 - 2EC \times ED.$$

El triángulo ABE dará, segun el teorema XIII,

$$(AB)^2 = (AE)^2 + (EB)^2 + 2EB \times ED.$$

Luego, sumando estas dos equaciones, y observando $EB = EC$, resulta

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AE)^2 + 2(EB)^2.$$

Corolario. Luego *en todo paralelógramo la suma de los quadrados de los lados es igual á la suma de los quadrados de las diagonales.*

Fig. 113. Porque las diagonales AC y BD se cortan mútua-
* 32. 1. mente en dos partes iguales en el punto E *, y así el triángulo ABC da

$$(AB)^2 + (BC)^2 = 2(AE)^2 + 2(BE)^2.$$

Tambien el triángulo ADC da

$$(AD)^2 + (DC)^2 = 2(AE)^2 + 2(DE)^2.$$

Sumando ordenadamente, observando que $BE = DE$, tendremos

$$(AD)^2 + (AB)^2 + (DC)^2 + (BC)^2 = 4(AE)^2 + 4(DE)^2.$$

Pero $3(AE)^2$ es el quadrado de $2AE$, ó de AC, y $4(DE)^2$ es el quadrado de BD: luego la suma de los quadrados de los lados es igual á la suma de los quadrados de las diagonales.

PROPOSICION XV.

TEOREMA.

La línea DE, *tirada paralelamente á la base de un triángulo* ABC, *divide á los lados* AB *y* AC *en partes proporcionales; de modo que tenemos* Fig. 114.

AD : DB : : AE : EC.

Tírense BE y DC.

Los dos triángulos BDE, DEC tienen una misma base DE, y tambien la misma altura, por estar situados los vertices B y C en una misma recta paralela á la base: luego dichos triángulos son equivalentes. * * Pr. 2.

Los triángulos ADE y BDE, cuyo vértice comun es E, tienen una misma altura, y estan entre sí como sus bases AD, DB *; tenemos pues * Pr. 6.

ADE : BDE : : AD : DB.

Los triángulos ADE y DEC, cuyo vértice comun es D, tienen tambien una misma altura, y siguen la razon de sus bases AE, EC : luego

ADE : DEC : : AE : EC.

Pero el triángulo BDE=DEC : luego deduciremos á causa de la razon comun en estas dos proporciones,

que AD : DB : : AE : EC.

Corolario I. De aquí resulta *componendo* AD+DB : AD : : AE+EC : AE, ó AB : AD : : AC : AE, y

tambien AB : BD : : AC : CE.

Corolario II. *Si entre dos rectas* AB, CD *se tiran quantas paralelas se quiera* AC, EF, GH, BD, &c.: *estas rectas quedarán cortadas proporcionalmente, y tendremos* AE : CF : : EG : FH : : GB : HD. Fig. 115.

Sea O el punto de concurso de las rectas AB y CD.

En el triángulo OEF, en que hemos tirado la línea AC paralela á la base EF, tendremos OE : AE : : OF : CF, ú OE : OF : : AE : CF. En el triángulo OGH tendremos tambien OE : EG : : OF : FH, ú OE : OF : :

EG : FH ; luego á causa de la razon comun OE : OF, dan estas dos proporciones AE : CF : : EG : FH. Del mismo modo se demostrará que EG : FH : : GB : HD, y así sucesivamente : luego las líneas AB, CD estan cortadas proporcionalmente por las paralelas EF, GH, &c.

PROPOSICION XVI.

TEOREMA.

Fig. 116. *Recíprocamente, si los lados* AB, AC *estan cortados proporcionalmente por la recta* DE, *de modo que sea* AD : DB : : AE : EC ; *digo que la recta* DE *será paralela á la base* BC.

Porque si DE no es paralela á BC, supongamos que lo sea DO. En tal caso tendremos, segun el teorema anterior AD : BD : : AO : OC. Pero, por hipótesis AD : DB : : AE : EC : luego tendriamos AO : OC : : AE : EC; proporcion imposible, pues por una parte el antecedente AE es mayor que AO, y de la otra el consecuente EC es menor que OC : luego la paralela á BC tirada por el punto D no puede ser otra que DE.

Escolio. La misma conclusion se verificaria, si supiésemos, la proporcion AB : AD : : AC : AE. Porque esta proporcion daria AB — AD : AD : : AC — AE : AE, ó BD : AD : : CE : AE.

PROPOSICION XVII.

TEOREMA.

Fig. 117. *La línea* AD, *que divide en dos partes iguales al ángulo* BAC *de un triángulo, dividirá á la base* BC *en dos segmentos* BD *y* DC *proporcionales á los lados adyacentes* AB *y* AC ; *de modo que se verificará* BD : DC : : AB : AC.

Por el punto C tírese á AD la paralela CE hasta que encuentre á BA prolongado.

En el triángulo BCE, la línea AD es paralela á la base CE, y tenemos la proporcion * *Pr. 15.

BD : DC : : AB : AE.

Pero el triángulo AEC es isósceles, porque las paralelas AD y CE nos dan el ángulo ACE = DAC, y el ángulo AEC = BAD *, y ademas, por suposicion, DAC = BAD: luego el ángulo ACE = AEC, y AE = AC *: luego substituyendo AC en lugar de AE en la proporcion anterior, tendremos *25. *13. 1.

BD : DC : : AB : AC.

PROPOSICION XVIII.

TEOREMA.

Dos triángulos equiángulos tienen los lados homólogos proporcionales, y son semejantes.

Sean ABC, CDE dos triángulos cuyos ángulos son respectivamente iguales, esto es, BAC = CDE, ABC = DCE, y ACB = DEC: digo que los lados homólogos ó adyacentes á los ángulos iguales serán proporcionales, de modo que tendremos BC : CE : : AB : CD : : AC : DE. Fig. 119.

Colóquense los lados homólogos BC, CE en una misma direccion, y prolónguense los lados BA, ED hasta que se encuentren en F.

Por ser BCE una línea recta, y el ángulo BCA = CED, se sigue que AC es paralela á DE *. Igualmente, por ser el ángulo ABC = DCE, la línea AB es paralela á DC: luego la figura ACDF es un paralelógramo. *25. 25.

En el triángulo BFE la línea AC es paralela á la base FE, y así tenemos BC : CE : : BA : AF *. Poniendo en lugar de AF su igual CD, tendremos *Pr. 15.

BC : CE : : BA : CD.

En el mismo triángulo BFE, considerando á BF como la base, CD es una paralela á ella, y tenemos la proporcion BC: CE:: FD: DE. Poniendo en lugar de FD su igual AC, resulta BC : CE : : AC : DE. Finalmente; ya que en estas dos proporciones hay la razon comun BC : CE, podemos deducir

AC : DE : : BA : CD.

Luego los triángulos equiángulos BAC, CDE tienen los lados homólogos proporcionales. Pero hemos sentado en la definicion II, que dos figuras son semejantes quando tienen sus ángulos respectivamente iguales, y al mismo tiempo los lados homólogos proporcionales: luego los triángulos equiángulos BAC, CDE son semejantes.

Corolario. Para que dos triángulos sean semejantes basta que tengan dos ángulos iguales cada uno al suyo; porque en este caso los terceros serán tambien iguales, y los triángulos serán equiángulos.

Escolio. Nótese que en los triángulos semejantes los lados homólogos estan opuestos á ángulos iguales; así siendo iguales los ángulos ACB y DEC, el lado AB es homólogo á DC. Del mismo modo AC y DE son homólogos por estar opuestos á los ángulos iguales ABC, DCE. Conocidos los lados homólogos, se forman al instante las proporciones

AB : DC : : AC : DE : : BC : CE.

PROPOSICION XIX.

TEOREMA.

Dos triángulos que tienen los lados homólogos proporcionales son equiángulos y semejantes.

Fig. 120. Supongamos que sea BC : EF : : AB : DE : : AC: DF; digo que los triángulos ABC y DEF tendrán los ángulos iguales; esto es, A=D, B=E, C=F.

Hágase en el punto E el ángulo FEG=B, y en el punto F el ángulo EFG=C.

Los terceros G y A serán iguales, y los dos triángulos BAC, EFG serán equiángulos: luego tendremos, segun el teorema pasado, BC : EF : : AB : EG. Pero, por hypótesis, BC : EF : : AB : DE : luego GE = DE. El mismo teorema nos da tambien BC : EF : : AC : FG, y sabemos que, por suposicion, BC : EF : : AC : DF; luego FG = DF : luego los triángulos EGF, DEF tienen sus tres lados respectivamente iguales, y por consiguiente son iguales*. Pero, por construccion, el triángulo EGF es equiángulo al triángulo ABC : luego tambien los triángulos DEF, ABC son equiángulos y semejantes. * 11. 1.

Escolio I. Estas dos últimas proposiciones nos hácen ver que en los triángulos la igualdad de los ángulos es consiguiente á la proporcionalidad de los lados, y recíprocamente; de modo, que es suficiente una de estas condiciones para que sea cierta la semejanza de los triángulos. No sucede así con las figuras de mas de tres lados; porque aun en los quadriláteros vemos que se pueden variar los ángulos sin alterar la proporcion de los lados, y variar los lados sin alterarlos ángulos; así que, la proporcionalidad de los lados no puede ser conseqüencia de la igualdad de los ángulos, ni *vice versâ.* Vemos, por Fig. 121. exemplo, que tirando á BC la paralela EF, los ángulos del quadrilátero AEFD son iguales á los del quadrilátero ABCD; pero la proporcion de los lados es distinta. Del mismo modo, sin variar los quatro lados AB, BC, CD, AD podemos separar ó aproxîmar el punto B del punto D, lo qual alterará los ángulos.

Escolio II. Las dos proposiciones anteriores, que en realidad no forman mas que una, juntas con la del quadrado de la hypotenusa, son las proposiciones mas importantes y fecundas de la Geometría; bastan casi ellas solas para todas las aplicaciones y resolucion de todos los problemas, y la razon es, porque todas las figuras pueden dividirse en triángulos, y un triángulo qualquiera en dos triángulos rectángulos. Así en las propiedades generales de los triángulos estan contenidas implicitamente las de todas las figuras.

PROPOSICION XX.

TEOREMA.

Dos triángulos son semejantes quando tienen un ángulo igual comprehendido entre lados proporcionales.

Fig. 122. Sea el ángulo A=D, y supongamos que es AB: DE : : AC : DF ; digo que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

Tómese AG=DE, y tírese GH paralela á BC.

* 25. 1. El ángulo AGH será igual á ABC *, y los dos triángulos GAH y BAC serán equiángulos. Tendremos, pues, AB : AG : : AC : AH ; pero, por suposicion, AB : DE : : AC : DF, y por construccion AG=DE : luego AH= DF. Los dos triángulos AGH, DEF tienen un ángulo igual comprehendido entre lados iguales : luego son iguales. Pero el triángulo AGH es semejante á ABC: luego tambien DEF es semejante á ABC.

PROPOSICION XXI.

TEOREMA.

Dos triángulos que tienen sus lados homólogos paralelos ó perpendiculares cada uno al suyo, son semejantes.

Fig. 123. Porque 1.°, si el lado AB es paralelo á DE, y BC
* 28. 1. á EF, el ángulo ABC será igual á DEF *; si ademas AC es paralela á DF, el ángulo ACB será igual á DFE, y tambien BAC á EDF : luego los triángulos ABC y DEF son equiángulos, y por consiguiente semejantes.

Fig. 124. 2.° Sea el lado DE perpendicular á AB, y DF á AC.

En el quadrilátero AIDH los dos ángulos I, H serán
* 26. 1. rectos; los quatro ángulos valen juntos quatro rectos *: luego los dos restantes IAH, IDH valen otros dos rectos. Pero los dos ángulos EDF, IDH valen tambien dos

rectos: luego el ángulo EDF es igual á IAH ó BAC. Del mismo modo, si el tercer lado EF es perpendicular al tercero BC, se demostrará que el ángulo DFE=C, y DEF=B: luego los dos triángulos ABC, FED, cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son equiángulos y semejantes.

Escolio. En el caso de los lados paralelos, estos son los lados homólogos: y en el caso de los perpendiculares, estos mismos son tambien homólogos. Así, en este último caso, DE es homólogo á AB, DF á AC, y EF á BC.

El caso de los lados perpendiculares podria presentar una situacion relativa de los dos triángulos distinta de la que suponemos en la fig. 124; pero siempre demostrariamos la igualdad de los ángulos respectivos, ya valiéndonos de los quadriláteros como AIDH, dos de cuyos ángulos son rectos, ya comparando dos triángulos que, con ángulos opuestos en el vértice, tuviesen cada uno un ángulo recto. Ademas, siempre se podria suponer que dentro del triángulo ABC se ha construido otro DEF, cuyos lados serian paralelos á los del triángulo que se compara con ABC, y entónces la demostracion entraria en el caso de la fig. 124.

PROPOSICION XXII.

TEOREMA.

Las líneas AF, AG, &c., *tiradas á arbitrio por el vértice de un triángulo, dividen en partes proporcionales á la base* BC, *y á su paralela* DE; *de modo que tenemos* DI : BF : : IK : FG : : KL : GH, &c. Fig. 125.

Porque una vez que DI es paralela á BF, el triángulo ADI es equiángulo á ABF, y tenemos la proporcion DI: BF: : AI : AF. Del mismo modo siendo IK paralela á FG, tenemos AI : AF: : IK : FG: luego, á causa de la razon comun AI : AF, tendremos ID : FB : :

KI : FG. Hallaremos de un modo parecido IK : FG : : KL : GH , &c. : luego la línea DE está dividida en los puntos I , K , L , como la base BC lo está en los puntos F , G , H.

Corolario. Luego si BC está dividida en partes iguales en los puntos F , G , H , su paralela DE estará dividida tambien en partes iguales en los puntos I , K , L.

PROPOSICION XXIII.

TEOREMA.

Fig. 126. *Si desde el ángulo recto* A *de un triángulo rectángulo baxamos á la hypotenusa la perpendicular* AD.

1.° *Los dos triángulos parciales* ABD, ADC *serán semejantes entre sí , y al triángulo total* ABC.

2.° *Cada lado* AB ó AC *será medio proporcional entre la hypotenusa* BC , *y el segmento adyacente* BD ó DC.

3.° *La perpendicular* AD *será media proporcional entre los dos segmentos* BD , DC.

Porque 1.° los dos triángulos BAD, BAC tienen comun el ángulo B ; ademas el ángulo recto BDA es igual al otro recto BAC : luego el tercero BAD del uno es igual al tercero C del otro , y por consiguiente estos dos triángulos son equiángulos y semejantes. Igualmente se demostrará que el triángulo DAC es semejante al triángulo BAC : luego los tres triángulos son equiángulos y semejantes entre sí.

2.° Una vez que los triángulos BAD y BAC son semejantes , sus lados homólogos son proporcionales. Pero el lado BD en el triángulo pequeño es homólogo á BA en el grande , por estar opuestos á ángulos iguales BAD y BCA ; y la hypotenusa BA del pequeño es homóloga á la hypotenusa BC del grande : luego podemos formar la proporcion BD : BA : : BA : BC. Del mismo modo tendriamos DC : AC : : AC : BC : luego 2.° cada uno de los lados AB, AC es medio proporcional entre la hypotenusa y el segmento adyacente á dicho lado.

3.° Finalmente la semejanza de los triángulos ABD, ADC da, comparando los lados homólogos BD : AD : : AD : DC : luego 3.° la perpendicular AD es media proporcional entre los segmentos BD, DC de la hypotenusa.

Escolio. La proporcion BD : AB : : AB : BC da igualando el producto de extremos y medios $(AB)^2 = BD \times BC$. Igualmente $(AC)^2 = DC \times BC$: luego

$$(AB)^2 + (AC)^2 = BD \times DC + DC \times BC.$$

El segundo miembro es lo mismo que $(BD + DC) \times BC$, y se reduce á $BC \times BC = (BC)^2$: luego tenemos $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$: luego el quadrado formado sobre la hypotenusa BC es igual á la suma de los quadrados formados sobre los otros dos lados AB, AC. De este modo recaemos sobre la proposicion del quadrado de la hypotenusa por un camino enteramente distinto del que hemos seguido anteriormente, y esto nos hace ver, que en rigor la proposicion del quadrado de la hypotenusa, es una conseqüencia de la proporcionalidad de los lados en los triángulos equiángulos. Así las proposiciones fundamentales de la Geometría se reducen, por decirlo así, á solo esta, que los triángulos equiángulos tienen sus lados homólogos proporcionales.

Muchas veces sucede, como acabamos de verlo en un exemplo, que sacando conseqüencias de una ó muchas proposiciones, recaemos sobre otras ya demostradas. En general, lo que caracteriza particularmente los teoremas de Geometría, y es una prueba incontestable de su certidumbre, es que combinándolos juntos de qualquiera modo que sea, con tal que sea exâcto el raciocinio, siempre se da con resultados ciertos. No sucederia así si alguna proposicion fuese falsa, ó no fuese enteramente cierta; sucederia muchas veces que la combinacion de las proposiciones aumentaria y haria mas patente el error. De esto vemos exemplos en todas las demostraciones en que empleamos la *reduccion tor ab-*

surdo. Estas demostraciones, cuyo fin es probar que dos cantidades son iguales, consisten en hacer ver que si hubiese entre ellas la menor desigualdad, iriamos á parar por la serie de los raciocinios á un absurdo manifiesto y palpable, viéndonos obligados de este modo á deducir que estas dos cantidades son iguales.

Fig. 127. *Corolario*. Si desde un punto A de la circunferencia tiramos á los extremos del diámetro BC las dos cuerdas
* 18. 2. AB y AC, el triángulo BAC será rectángulo en A *: luego 1.° *la perpendicular* AD *es media proporcional entre los dos segmentos* BD, DC *del diámetro*; ó, lo que es lo propio, el quadrado $(AD)^2$ es igual al rectángulo $BD \times DC$.

2.° *La cuerda* AB *es media proporcional entre el diámetro* BC *y el segmento adyacente* BD; ó $(AB)^2 = BD \times BC$. Tenemos igualmente $(AC)^2 = CD \times BC$: luego $(AB)^2 : (AC)^2 :: BD : DC$; y si comparamos $(AB)^2$ con $(BC)^2$, tendremos $(AB)^2 : (BC)^2 :: BD : BC$; tambien tendriamos $(AC)^2 : (BC)^2 :: DC : BC$. Estas razones de los quadrados de los lados, ya entre sí, ya con el quadrado de la hypotenusa, se han puesto anteriormente en los corolarios 3 y 4 de la prop. XI.

PROPOSICION XXIV.

TEOREMA.

Fig. 128. *Dos triángulos que tienen un ángulo igual, estan entre sí como los rectángulos de los lados que comprehenden dicho ángulo. Así el triángulo* ABC *es al triángulo* ADE *como el rectángulo* $AB \times AC$ *es al rectángulo* $AD \times AE$.

Tírese BE.

Los dos triángulos ABE, ADE, cuyo vértice comun es E, tienen una misma altura, y siguen la razon
* Prop. 6. de sus bases AB, AD *: luego

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

Tenemos tambien

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y quitando el término comun ABE, tendremos

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Corolario. Luego los dos triángulos serian equivalentes, si el rectángulo $AB \times AC$ fuese igual al rectángulo $AD \times AE$, ó si tuviésemos $AB : AD :: AE : AC$, lo qual se verificaria si la línea DC fuese paralela á BE.

PROPOSICION XXV.

TEOREMA.

Dos triángulos semejantes estan entre sí como los quadrados de los lados homólogos.

Sea el ángulo $A = D$, y el ángulo $B = E$. Fig. 122

Desde luego, por ser iguales los ángulos A y D, tendremos segun la proposicion anterior

$$ABC : DEF :: AB \times AC : DE \times DF.$$

Por otra parte la semejanza de los triángulos nos da $AB : DE :: AC : DF$. Y si multiplicamos ordenadamente esta proporcion por la idéntica $AC : DF :: AC : DF$, resultará

$$AB \times AC : DE \times DF :: (AC)^2 : (DF)^2,$$

Luego

$$ABC : DEF :: (AC)^2 : (DF)^2.$$

Luego dos triángulos semejantes ABC, DEF estan entre sí como los quadrados de los lados homólogos AC y DF, ó como los quadrados de otros dos lados homólogos qualesquiera.

PROPOSICION XXVI.

TEOREMA.

Dos polígonos semejantes estan compuestos de igual número de triángulos semejantes cada uno al suyo, y semejantemente colocados.

Fig. 129. En el polígono ABCDE tírense desde un mismo ángulo A á los demas ángulos las diagonales AC, AD. En el otro polígono FGHIK tírense del mismo modo desde el ángulo F homólogo a A las diagonales FH, FI á los demas ángulos.

Por ser los polígonos semejantes, el ángulo ABC es igual á su homólogo FGH *, y ademas los lados AB y BC son proporcionales á los lados FG y GH; de modo que tenemos AB : FG : : BC : GH. De aquí sacamos que los triángulos ABC, FGH tienen un ángulo igual comprehendido entre lados proporcionales: luego son semejantes *: luego el ángulo BCA es igual á GHF. Si restamos estos ángulos iguales de los otros iguales BCD, GHI, los residuos ACD y FHI serán iguales. Pero por ser semejantes los triángulos ABC y FGH, tenemos AC: FH : : BC : GH. Por otra parte, la semejanza de los polígonos * nos da BC : GH : : CD : HI: luego AC: FH : : CD : HI; pero hemos visto ya que el ángulo ACD = FHI: luego los triángulos ACD y FHI tienen igual un ángulo comprehendido entre lados proporcionales: luego son semejantes. Del mismo modo se continuaría demostrando la semejanza de los triángulos siguientes, sea qual fuere el número de lados de los polígonos propuestos: luego dos polígonos semejantes estan compuestos de un mismo numero de triángulos semejantes, y semejantemente colocados.

* Def. 2.

* Pr. 20.

* Def. 2.

Escolio. Igualmente es cierta la proposicion inversa: *si dos polígonos estan compuestos de igual número de triángulos semejantes, y semejantemente colocados, estos dos* *polígonos serán semejantes.*

Porque la semejanza de los triángulos respectivos dará el ángulo ABC=FGH, BCA=GHF, ACD=FHI: luego BCD=GHI, y CDE=HIK, &c. Tendremos ademas AB : FG :: BC : GH :: AC : FH : CD : HI, &c.: luego los dos polígonos tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales, y por consiguiente son semejantes.

PROPOSICION XXVII.

TEOREMA.

Los contornos ó perimetros de los polígonos semejantes siguen la razon de sus lados homólogos, y sus superficies la de los quadrados de estos mismos lados.

Porque 1.° ya que tenemos por la naturaleza de las figuras semejantes AB : FG :: BC : GH :: CD : HI, &c., podemos deducir de esta serie de razones iguales: la suma de los antecedentes AB+BC+CD, &c., perímetro de la primera figura es á la suma de los consecuentes FG+GH+HI, &c., perímetro de la segunda, como un antecedente es á su consecuente, ó como el lado AB es á su homólogo FG. Fig. 129.

2.° Por ser semejantes los triángulos ABC, FGH, tenemos * ABC : FGH :: $(AC)^2 : (FH)^2$. Del mismo modo, los triángulos semejantes ACD, FHI dan ACD : FHI :: $(AC)^2 : (FH)^2$: luego á causa de la razon comun $(AC)^2 : (FH)^2$, tenemos * Pr. 25.

ABC : FGH :: ACD : FHI.

Por un raciocinio semejante hallariamos

ACD : FHI :: ADE : FIK.

Y así succesivamente, si hubiese mayor número de triángulos. De esta serie de razones iguales sacamos: la suma de los antecedentes ABC+ACD+ADE, ó el polígono ABCDE, es á la suma de los consecuentes FGH+FHI+FIK, ó al polígono FGHIK, como un antecedente ABC es á su consecuente FGH, ó como

$(AB)^2$ es á $(FG)^2$: luego los polígonos semejantes siguen la razon de los quadrados de sus lados homólogos.

Corolario. Si construyésemos tres figuras semejantes, cuyos lados homólogos fuesen iguales á los tres lados de un triángulo rectángulo, la figura formada sobre el lado mayor seria igual á la suma de las otras dos; porque estas tres figuras son proporcionales á los quadrados de sus lados homólogos; pero el quadrado de la hypotenusa es igual á la suma de los quadrados de los otros dos lados: luego &c.

PROPOSICION XXVIII.

TEOREMA.

Fig. 130. *Las partes de dos cuerdas* AB, CD, *que se cortan en un círculo, son recíprocamente proporcionales; esto es, que tenemos* AO : DO : : CO : OB.

Tírense AC y BD.

En los triángulos ACO, BOD los ángulos en O son iguales por opuestos al vértice; el ángulo A es igual al
* 18. 2. ángulo D, por estar inscritos en un mismo segmento *; y por la misma razon el ángulo C = B : luego estos triángulos son semejantes, y sus lados homólogos dan la proporcion AO : DO : : CO : OB.

Corolario. De aquí sacamos $AO \times OB = DO \times CO$: luego el rectángulo de las dos partes de una de las cuerdas, es igual al rectángulo de las dos partes de la otra.

PROPOSICION XXIX.

TEOREMA.

Fig. 131. *Si desde un mismo punto* O, *tomado fuera del círculo, tiramos las secantes* OB, OC, *terminadas en el arco*

cóncavo BC, *las secantes enteras serán recíprocamente proporcionales con sus partes externas; esto es, que tendremos* OB : OC : : OD : OA.

Porque si tiramos AC y BD, los triángulos OAC, OBD tienen comun el ángulo O; ademas el ángulo B=C *: luego estos triángulos son semejantes, y los lados homólogos nos dan la proporcion * 18. 2.

OB : OC : : OD : OA.

Corolario. Luego el rectángulo OA×OB es igual al rectángulo OC×OD.

Escolio. Adviértase que esta proposicion tiene mucha analogía con la anterior, y que solo se diferencia en que en vez de cortarse las dos cuerdas AB, CD dentro del círculo, se cortan fuera. Tambien la proposicion siguiente puede mirarse como un caso particular de esta.

PROPOSICION XXX.

TEOREMA.

Si desde un mismo punto O, *tomado fuera del círculo, tiramos una tangente* OA *y una secante* OC, *la tangente será media proporcional entre la secante y su parte externa; de modo que será* OC : AO : : AO : OD, *ó, lo que es lo mismo*, $(OA)^2 = OC \times OD$. Fig. 132.

Porque tirando AD y AC, los triángulos OAD, OAC tienen un ángulo comun. Ademas el angulo OAD, formado por una tangente y una cuerda *, tiene por medida la mitad del arco AD, y el ángulo C tiene la misma medida: luego el ángulo OAD=C, y así dos triángulos son semejantes, y tenemos la proporcion * 19. 2.

OC : OA : : OA : OD,

que da $(OA)^2 = OC \times OD$.

PROPOSICION XXXI.

TEOREMA.

Fig. 133. *En un triángulo* ABC, *si dividimos el ángulo* A *en dos partes iguales con la línea* CD, *el rectángulo de los lados* AB, AC *será igual al rectángulo de los segmentos* BD, DC, *mas el quadrado de la secante* AD.

Hágase pasar una circunferencia por los tres puntos A, B, C; prolónguese AD hasta que encuentre á la circunferencia, y tírese CE.

El triángulo BAD es semejante al triángulo EAC; porque, por hypótesis, el ángulo $BAD=EAC$; ademas el ángulo $B=E$, por tener ámbos por medida la mitad del arco AC: luego estos triángulos son semejantes, y sus lados homólogos dan la proporcion $BA:AE::AD:AC$; de aquí resulta $BA\times AC=AE\times AD$; pero $AE=AD+DE$, y multiplicando de ambas partes por AD, tenemos $AE\times AD=(AD)^2+AD\times DE$; por otra

*Pr. 28. parte $AD\times DE=BD\times DC$ *: luego finalmente

$$BA\times AC=(AD)^2+BD\times DC.$$

PROPOSICION XXXII.

TEOREMA.

Fig. 124. *En todo triángulo* ABC, *el rectángulo de los dos lados* AB, AC, *es igual al rectángulo del diámetro* CE *del círculo circunscrito por la perpendicular* AD, *baxada sobre el tercer lado* BC.

Porque si tiramos AE, los triángulos ABD y AEC son rectángulos, uno en D, y el otro en A; ademas el ángulo $B=E$: luego estos triángulos son semejantes, y dan la proporcion $AB:CE::AD:AC$, de donde sacamos $AB\times AC=CE\times AD$.

Corolario. Si multiplicamos estas cantidades iguales por una misma cantidad BC, tendremos $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$. Pero $AD \times BC$ es el duplo de la superficie del triángulo *: luego *el producto de los tres lados de un triángulo es igual á su superficie multiplicada por el duplo del diámetro del círculo circunscrito.* * Pr. 6.

El producto de tres líneas se llama algunas veces un *sólido*, por la razon que se verá luego. Su valor es fácil de concebir, imaginando que las líneas estan reducidas á números, y multiplicando dichos números.

Escolio. Tambien se puede demostrar que la *superficie de un triángulo es igual á su perímetro multiplicado por la mitad del radio del círculo inscrito.*

Porque los triángulos AOB, BOC, AOC, cuyo vértice comun es O, tienen por altura comun el radio del círculo inscrito: luego la suma de estos triángulos será igual á la suma de las bases AB, BC, AC multiplicada por la mitad del radio OD: luego el triángulo ABC es igual á su perímetro multiplicado por la mitad del radio del círculo inscrito. Fig. 87.

PROPOSICION XXXIII.

TEOREMA.

En todo quadrilátero inscrito ABCD, *el rectángulo de las dos diagonales* AC, BD, *es igual á la suma de los rectángulos de los lados opuestos; de modo que tenemos* $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. Fig. 135.

Tómese el arco $CO = AD$.

Tírese BO que encuentre á la diagonal AC en I.

Los ángulos ABD y CBI son iguales, pues el uno tiene por medida la mitad de AD, y el otro la mitad de CO igual á AD. El ángulo $ADB = BCI$, por estar inscritos ámbos en un mismo segmento AOB: luego el triángulo ABD es semejante al triángulo IBC, y tenemos la proporcion $AD : CI :: BD : BC$; de donde resulta $AD \times BC = CI \times BD$. Digo ahora que el triángulo ABI es semejante al triángulo BDC; porque siendo el arco $AD = CO$; si por ambas partes añadimos OD, tendremos el arco $AO = DC$: luego el ángulo $ABI = DBC$. Ademas los ángulos BAI, BDC son iguales por estar inscritos en un mismo segmento: luego los triángulos ABI y DBC son semejantes, y sus lados homólogos dan la proporcion $AB : BD :: AI : CD$; de donde deducimos finalmente $AB \times CD = AI \times BD$.

Sumando los dos resultados hallados, y observando que $AI \times BD + CI \times BD = (AI + CI) \times BD = AC \times BD$, resultará $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

Escolio. Del mismo modo se puede demostrar otro teorema sobre el quadrilátero inscrito.

El triángulo ABD, semejante á BIC, da la proporcion $BD : BC :: AB : BI$; de donde resulta $BI \times BD = BC \times AB$. Si añadimos CO, el triángulo ICO, semejante á ABI, será semejante á BDC, y dará la proporcion $BD : CO :: DC : OI$; y de aquí deducimos $OI \times BD = CO \times DC$, ó por ser $CO = AD$, $OI \times BD = AD \times DC$. Sumando los dos resultados, y reparando que $BI \times BD + OI \times BD$ se reduce á $BO \times BD$, sacarémos $BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC$.

Si hubiesemos tomado $BP = AD$, y tirado CKP, habriamos hallado por un camino parecido

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Pero siendo el arco $BP = CO$, si añadimos por ambas partes BC, tendremos el arco $CBP = BCO$: luego la cuerda CP es igual á la cuerda BO, y por consiguiente los rectángulos $BO \times BD$, y $CP \times CA$ siguen entre sí la razon de $BD : CA$: luego

$$BD : CA :: AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD.$$

Luego *las dos diagonales de un quadrilátero inscrito siguen una con otra la razon de los rectángulos de los lados que terminan en sus extremos.*

Estos dos teoremas pueden servir para hallar las diagonales conocidos los lados.

PROPOSICION XXXVI.

TEOREMA.

Sea P *un punto dado dentro del círculo sobre el radio* AC, *y tómese afuera un punto* Q *sobre la prolongacion del mismo radio, de modo que tengamos* CP : CA :: CA : CQ; *si desde un punto qualquiera* M *de la circunferencia tiramos á los dos puntos* P *y* Q *las rectas* MP, MQ; *digo que estas rectas seguirán una razon constante, y que tendremos* PM : MQ :: AP : AQ. Fig. 136.

Porque, por suposicion, tenemos CP : CA :: CA : CQ; poniendo CM en lugar de CA, sacamos CP : CM :: CM : CQ: luego los triángulos CPM y CQM tienen igual un ángulo comprehendido entre lados proporcionales *: luego son semejantes, y el tercer lado MP es al tercero MQ como CP es á CM ó CA. Pero la proporcion CP : CA :: CA : CQ da *dividendo*, CP : CA :: CA — CP : CQ — CA, ó CP : CA :: AP : AQ: luego MP : MQ :: AP : AQ. * 20. 3.

Problemas relativos al Libro III.

PROBLEMA I.

Dividir una línea recta dada en tantas partes iguales quantas se quiera, ó en partes proporcionales á líneas dadas.

1.° Propongámonos dividir la línea AB en cinco partes iguales. Por el extremo A tírese la recta indefinida AG, y tomando AC de un tamaño qualquiera, llévesela cinco veces sobre AG. Tírese por el último punto de division G, y el extremo B la línea GB, y luego se tirará CI paralela á GB: digo que AI será la quinta parte de la línea AB, y que así, llevando AI Fig. 137.

cinco veces sobre AB, esta quedará dividida en cinco partes iguales.

Porque una vez que CI es paralela á GB, los lados AG y AB estan cortados proporcionalmente en C é I. Pero AC es la quinta parte de AG: luego AI es tambien la quinta parte de AB.

Fig. 138. 2.° Propongámonos dividir la línea AB en partes proporcionales con las líneas dadas P, Q, R. Por el extremo A tírese la indefinida AG, tómese AC=P, CD=Q, DE=R; únanse los extremos E y B, y por los puntos C, D tírense CI, DK paralelas á EB: digo que la línea AB estará dividida en partes AI, IK, KB proporcionales á las líneas dadas P, Q, R.

Porque por razon de las paralelas CI, DK, EB, las partes AI, IK, KB son proporcionales á las partes AC, CD, DE *; y estas por construccion son iguales á las líneas dadas P, Q, R.

* Pr. 15.

PROBLEMA II.

Hallar una quarta proporcional á tres líneas dadas A, B, C.

Fig. 139. Tírense indefinidamente las dos rectas DE y DF, que formen un ángulo qualquiera. Sobre DE tómese DA=A, y DB=B, sobre DF tómese DC=C, tírese AC, y por el punto B tírese tambien BX paralela á AC: digo que DX será la quarta proporcional pedida.

Porque por ser BX paralela á AC, tenemos la proporcion DA : DB :: DC : DX; pero los tres primeros términos de esta proporcion son iguales á las tres rectas dadas: luego DX es la quarta proporcional pedida.

Corolario. Por el mismo método se hallará una tercera proporcional á dos rectas dadas A y B, porque será la misma que la quarta proporcional á las tres A, B, C.

PROBLEMA III.

Hallar una media proporcional entre dos líneas dadas Fig. 140.
A y B.

Sobre la línea indefinida DF tómese DE = A, y EF = B; sobre la línea entera DF como diámetro trácese la semicircunferencia DGF; en el punto E levántese al diámetro la perpendicular EG, que encuentre á la circunferencia en G: digo que EG será la media proporcional que buscamos.

Porque la perpendicular GE, baxada desde un punto de la circunferencia al diámetro, es media proporcional entre los dos segmentos DE y EF del diámetro *; *Prop. 23. pero estos segmentos son iguales á las líneas dadas A, B: luego, &c.

PROBLEMA IV.

Dividir la línea dada AB *en dos partes, de modo* Fig. 141. *que la mayor sea media proporcional entre la línea entera y la otra parte.*

En el extremo B de la línea AB levántese la perpendicular BC igual á la mitad de AB; desde el punto C, como centro, y con el radio CB, descríbase una circunferencia; tírese AC, que cortará á la circunferencia en D, y tómese AF = AD: digo que la línea AB quedará dividida en el punto F del modo que se pide; esto es, que tendremos AB : AF : : AF : FB.

Porque siendo AB perpendicular en el extremo del radio CB es una tangente; y si prolongamos AC hasta que encuentre de nuevo á la circunferencia en E, tendremos * AE : AB : : AB : AD: luego *dividendo* AE — *Pr. 50. AB : AB : : AB — AD : AD. Pero por ser el radio BC la mitad de AB, el diámetro DE es igual á AB, y por consiguiente AE — AB = AD = AF; igualmente por ser AF = AD, tenemos AB — AD = FB: luego AF : AB : :

FB : AD = AF : luego *invertendo* AB : AF : : AF : FB.

Escolio. Este modo de dividir la línea AB, se llama dividirla en *media y extrema razon*, cuyo uso se verá mas adelante. Se puede advertir que la secante AB está dividida en media y extrema razon en el punto D, porque de ser AB = DE, sacamos AE : DE : : DE : AD.

PROBLEMA V.

Fig. 142. *Por un punto dado A en el ángulo conocido BCD tirar la línea BD, de modo que las partes AB, AD, comprehendidas entre el punto A y los dos lados del ángulo, sean iguales.*

Por el punto A tírese AE paralela á CD; tómese BE = CE, y por los puntos B y A tírese BAD, que será la línea pedida.

Porque siendo AE paralela á CD, tenemos BE : EC : : BA : AD; pero BE = EC : luego BA = AD.

PROBLEMA VI.

Formar un quadrado equivalente á un paralelógramo, ó á un triángulo dado.

Fig. 143. 1.° Sea ABCD el paralelógramo dado, AB su base DE su altura.

* Pr. 3. Entre AB y DE búsquese una media proporcional XY *: digo que el quadrado formado sobre XY será equivalente al paralelógramo ABCD.

Porque por construccion AB : XY : : XY : DE : luego $(XY)^2 = AB \times DE$; pero $AB \times DE$ es la medida del paralelógramo, y $(XY)^2$ la del quadrado : luego son equivalentes.

Fig. 144. 2.° Sea ABC el triángulo dado, BC su base, AD su altura.

Tómese una media proporcional entre BC, y la mitad de AD, y séalo XY : digo que el quadrado formado sobre XY será equivalente al triángulo ABC.

Porque por ser BC : XY : XY : $\frac{1}{2}$ AD, resulta $(XY)^2 = BC \times \frac{1}{2} AD$: luego el quadrado formado sobre XY es equivalente al triángulo ABC.

PROBLEMA VII.

Formar sobre la línea dada AD *un rectángulo* ADEX *equivalente al rectángulo dado* ABFC. Fig. 145.

Búsquese una quarta proporcional á las tres líneas AD, AB, AC, y séalo AX : digo que el rectángulo formado sobre AD y AX será equivalente al rectángulo ABFC.

Porque ya que AD : AB : : AC : AX, será $AD \times AX = AB \times AC$: luego el rectángulo ADEX es equivalente al rectángulo ABFC.

PROBLEMA VIII.

Expresar en líneas la razon entre el rectángulo formado de las rectas A y B, *y el formado de las* C y D. Fig. 148.

Sea X una quarta proporcional á las tres líneas B, C, D : digo que la razon entre estas dos líneas A y X será la misma que la de los dos rectángulos $A \times B$ y $C \times D$.

Porque una vez que B : : C : : D : X, será $C \times D = B \times X$: luego $A \times B : C \times D : : A \times B : B \times X : : A : X$.

Corolario. Luego para hallar la razon de los quadrados formados sobre las líneas dadas A y C, se debe buscar una tercera proporcional X á las líneas A y C, de modo que tengamos A : C : : C : X, y sacaremos $A^2 : C^2 : : A : X$.

PROBLEMA IX.

Fig. 149. *Hallar en líneas la razon del producto de tres rectas dadas* A, B, C *con el producto de otras tres* P, Q, R, *dadas tambien.*

A las tres líneas dadas P, A, B búsquese una quarta proporcional X, á las otras tres dadas C, Q, R búsquese igualmente una quarta proporcional Y. Las dos rectas X, Y estarán entre sí como los productos $A \times B \times C$, $P \times Q \times R$.

Porque de ser $P : A :: B : X$, sacamos $A \times B = P \times X$; y multiplicando ambos miembros por C, $A \times B \times C = C \times P \times X$. Igualmente, por ser $C : Q :: R : Y$, resulta $Q \times R = C \times Y$; y multiplicando los dos términos por P, tenemos $P \times Q \times R = P \times C \times Y$: luego el producto $A \times B \times C$ es al producto $P \times Q \times R$ como $C \times P \times X$ es á $P \times C \times Y$, ó como X es á Y.

PROBLEMA X.

Formar un triángulo equivalente á un polígono dado.

Sea ABCDE el polígono dado.

Fig. 146. Tírese desde luego CE, que corta el triángulo CDE del polígono entero; por el punto D tírese DF paralela á CE hasta que encuentre á la prolongacion de AE; tírese CF, y el polígono ABCDE será equivalente al polígono ABCF que tiene un lado ménos.

Porque los triángulos CDE y CFE tienen comun la base CE; tienen tambien una misma altura, por estar situados sus vértices D y F en una misma recta DF paralela á la base: luego estos triángulos son equivalentes. Añadiendo por ambas partes la figura ABCE, tendremos por un lado el polígono ABCDE, y por el otro el polígono ABCF, que serán equivalentes.

Del mismo modo podemos restar el ángulo B substituyendo al triángulo ABC el triángulo equivalente

AGC, y así el pentágono ABCDE quedará transformado en un triángulo equivalente GCF.

Del mismo método nos serviremos en qualquiera otra figura; porque disminuyendo uno por uno sus lados, vendremos á dar al cabo con el triángulo equivalente.

Escolio. Ya hemos visto que qualquiera triángulo se puede transformar en un quadrado equivalente *, y así podremos hallar siempre un quadrado equivalente á una figura rectilínea dada; esto es lo que llamamos *quadrar* la tal figura rectilínea, ó hallar su *quadratura*. * Pr. 6.

El problema de *la quadratura del círculo* consiste en hallar un quadrado equivalente á un círculo, cuyo diámetro es dado.

PROBLEMA XI.

Formar un quadrado que sea igual á la suma, ó á la diferencia de dos quadrados dados.

Sean A y B los lados de los quadrados dados. Fig. 147.

1.° Si nos proponemos hallar un quadrado igual á la suma de estos quadrados, tírense las dos rectas indefinidas ED y EF que formen un ángulo recto. Tómese ED=A, y EG=B, tírese DG, y este será el lado del quadrado que buscamos.

Porque siendo rectángulo el triángulo DEG, el quadrado formado sobre DG es igual á la suma de los formados sobre ED y EG.

2.° Si queremos hallar un quadrado igual á la diferencia de los quadrados dados, fórmese igualmente el ángulo recto FEH, tómese GE igual al menor de los lados A y B. Desde el punto G, como centro, y con un radio GH igual al otro lado, trácese un arco que corte á la recta EH en H: digo que el quadrado formado sobre EH será igual á la diferencia de los formados sobre las líneas A y B.

Porque siendo rectángulo el triángulo GHE, la hypotenusa GH es igual á A, y el lado GE=B: luego el quadrado formado sobre EH, &c.

Escolio. De este modo podemos encontrar un quadrado igual á la suma de quantos quadrados se quiera porque la construccion que reduce dos á uno solo, servirá para reducir tres á dos, estos dos á uno, y así de los demas. Lo mismo sucederia si hubiesemos de restar algunos quadrados de la suma de otros.

PROBLEMA XII.

Fig. 150. *Construir un quadrado que esté con otro quadrado dado* ABCD, *como la línea* M *con la línea* N.

Sobre la recta indeterminada EG, tómese EF=M, y FG=N; sobre EG, como diámetro, trácese una semicircunferencia, y en el punto F levántese al diámetro la perpendicular FH. Desde el punto H tírense las cuerdas HG, HE, prolongándolas indefinidamente; sobre la primera tómese HK igual al lado AB del quadrado, y por el punto K tírese KI paralela á EG: digo que HI será el lado del quadrado que buscamos.

Porque las paralelas KI y GE nos dan HI : HK : : HE : HG : luego $(HI)^2 : (HK)^2 : : (HE)^2 : (HG)^2$; pe-
Pr. 23. ro en el triángulo rectángulo EHG *, el quadrado de EH es al quadrado de HG como el segmento EF es al segmento FG, ó como M es á N : luego $(HI)^2 : (HK)^2 : :$ M : N. Pero HK=AB : luego el quadrado formado sobre HI es al formado sobre AB como M es á N.

PROBLEMA XIII.

Fig. 129. *Sobre el lado* FG *homólogo de* AB, *trazar un polígono semejante al dado* ABCDE.

En el polígono dado tírense las diagonales AC y AD; en el punto F hágase el ángulo GFH=BAC, y en el punto G el ángulo FGH=ABC. Las rectas FH y GH se cortarán en H, y FGH será un triángulo semejante á ABC; construyase igualmente sobre FH, homólogo de AC, el triángulo FIH semejante á ADC, y sobre FI, homólogo de AD, construyase el triángulo FIK semejante á ADE. El polígono FGHIK será el polígono que buscamos, semejante á ABCDE.

Porque estos dos polígonos estan compuestos de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos. * * Pr. 26

PROBLEMA XIV.

Dadas dos figuras semejantes, construir otra figura semejante á ellas, que sea igual á su suma ó á su diferencia.

Sean A y B dos lados homólogos de las figuras dadas; búsquese un quadrado igual á la suma ó diferencia de los quadrados formados sobre A y B; sea X el lado de este quadrado, que será en la figura que buscamos el lado homólogo á los A y B de las figuras dadas; y luego construyase la figura segun el problema anterior.

Porque las figuras semejantes siguen la razon de los quadrados de sus lados homólogos; pero el quadrado del lado X es igual á la suma ó á la diferencia de los quadrados formados sobre los lados homólogos A y B: luego la figura formada sobre el lado X es igual á la suma ó diferencia de las figuras semejantes formadas sobre los lados A y B.

PROBLEMA XV.

Construir una figura semejante á otra, y que esté con ella en la razon dada de M *á* N.

Sea A un lado de la figura dada, X el lado homólogo en la figura que buscamos; será preciso que el quadrado de X sea al quadrado de A, como M es á N *. * Pr. 27.
Hallaremos, pues, X por el problema XII; y lo demas se concluirá segun el problema XIII.

PROBLEMA XVI.

Fig. 151. *Construir una figura semejante á la figura* P, *y equivalente á la figura* Q.

Búsquese el lado M de un quadrado equivalente á la figura P, y el lado N de un quadrado equivalente á la figura Q. Sea ademas X una quarta proporcional á las tres líneas dadas M, N, AB. Sobre el lado X, homólogo de AB, trácese una figura semejante á P: y digo que esta será al mismo tiempo equivalente á la figura Q.

Porque llamando Y la figura formada sobre el lado X, tendremos $P : Y :: (AB)^2 : X^2$; pero, por construccion, $AB : X :: M : N$, ó $(AB)^2 : X^2 :: M^2 : N^2$: luego $P : Y :: M^2 : N^2$. Pero tenemos tambien por construccion $M^2 = P$, y $N^2 = Q$: luego $P : Y :: P : Q$: luego $Y = Q$: luego la figura Y es semejante á la figura P, y equivalente á la figura Q.

PROBLEMA XVII.

Fig. 152. *Construir un rectángulo equivalente á un quadrado dado* C, *y cuyos lados adyacentes compongan una suma determinada* AB.

Sobre AB, como diámetro, trácese una semicircunferencia; tírese paralelámente al diámetro la línea DE á una distancia AD igual al lado del quadrado dado C. Desde el punto E, en que la paralela encuentra á la circunferencia, báxese al diámetro la perpendicular EF; digo que AF y FB son los lados del rectángulo pedido.

Porque su suma es igual á AB, y su rectángulo
* Pr. 23. $AF \times FB$ es igual al quadrado de EF *, ó al quadrado de AD: luego este rectángulo es equivalente al quadrado dado C.

Escolio. Para que sea posible el problema, es preciso que la distancia AD no sea mayor que el radio; esto es, que el lado del quadrado C no sea mayor que la mitad de la recta AB.

PROBLEMA XVIII.

Construir un rectángulo equivalente á un quadrado C, *y cuyos lados adyacentes tengan entre sí la diferencia dada* AB. Fig. 153.

Sobre la línea dada AB, como diámetro, trácese una circunferencia; por el extremo del diámetro tírese la tangente AD igual al lado del quadrado C; por el punto D y el centro tírese la secante DE: digo que DE y DF serán los lados adyacentes del rectángulo pedido.

Porque 1.° la diferencia de estos lados es igual al diámetro EF ó AB; 2.° el rectángulo DE × DF es igual á $(AD)^2$ *: luego este rectángulo será equivalente al quadrado dado C. * Pr. 30.

PROBLEMA XIX.

Hallar el comun divisor, si le hay, entre la diagonal y el lado del quadrado.

Sea ABCG un quadrado qualquiera, y AC su diagonal. Fig. 154.

Es menester primeramente sobreponer CB á CA quantas veces quepa *, y para esto descríbase desde el centro C, y con el radio CB, el semicírculo DBE; y vemos que CB cabe en AC una vez, y queda el residuo AD. Resulta, pues, de la primera operacion el cociente 1 con la resta AD, que es preciso comparar con BC, ó su igual AB. * Pr. 17. Lib. 2.

Podemos tomar AF = AD, y sobreponer realmente

AF á AB; hallariamos que cabe dos veces y algo mas; pero como este residuo y los que sigan van disminuyendo, y que en breve serian despreciables por su pequeñez, esta operacion solo seria un medio mecánico imperfecto, por el qual nos seria imposible saber si las líneas AC y CB tienen ó no tienen entre sí un comun divisor; pero hay un medio sencillísimo de evitar las líneas decrecientes, teniendo solo que trabajar con líneas constantes, ó cuya magnitud es siempre una misma.

En efecto, siendo recto el ángulo ABC, AB es una tangente, y AE una secante tirada del mismo punto; de modo que tenemos * AD : AB : : AB : AE. Así en la segunda operacion, en que se trata de comparar AD con AB, podemos poner en lugar de la razon de AD : AB la de AB : AE; pero AB, ó su igual CD, cabe dos veces en AE, con el residuo AD: luego el resultado de la segunda operacion es el cociente 2 con la resta AD, que hemos de comparar á AB.

* Pr. 30.

La tercera operacion, que consiste en comparar AD con AB, se reducirá tambien á comparar AB, ó su igual CD con AE, y tendremos de nuevo el mismo cociente 2, y el residuo AD.

Inferiremos, pues, que jamas se acabará la operacion, y que por consiguiente no hay comun divisor entre la diágonal y el lado del quadrado: verdad conocida ya en la aritmética, (pues estas dos líneas siguen la razon de $\sqrt{2} : 1$) *; pero que adquiere mayor fuerzo y claridad con la resolucion geométrica.

* Pr. 11.

Escolio. Aquí vemos que tampoco es posible hallar en números la razon exâcta de la diagonal con el lado del quadrado; pero podemos aproxîmarnos quanto queramos por medio de la fraccion continua, que es igual á dicha razon La primera operacion ha dado de cociente 1; la segunda, y todas las demas al infinito, dan 2; y así la fraccion de que tratamos es

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}\text{, &c., al infinito.}$$

Por exemplo, si calculamos esta fraccion hasta el quarto término inclusive, hallamos que su valor es $1\frac{12}{29}$ ó $\frac{41}{29}$; de modo que la razon aproxîmada de la diagonal al lado del quadrado es la de 41 : 29. Hallariamos una razon mas aproxîmada, calculando mayor número de términos.

LIBRO IV.

LOS POLÍGONOS REGULARES, Y LA MEDIDA DEL CÍRCULO.

DEFINICION.

Un polígono, que es equiángulo, y equilátero al mismo tiempo, se llama *polígono regular*.

El polígono regular no tiene número determinado de lados. El triángulo equilátero es un polígono regular de tres lados; el quadrado lo es de quatro, y así sucesivamente.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Dos polígonos regulares de un mismo número de lados son dos figuras semejantes.

Fig. 155. Sean, por exemplo, los dos exâgonos regulares ABCDEF, *abcdef*, la suma de los ángulos es una misma en ambas figuras, y vale ocho ángulos rectos. *

* 21. 1.

El ángulo A es la sexta parte de esta suma, igualmente que el ángulo *a*: luego estos dos ángulos A y *a* son iguales, y lo mismo sucede por consiguiente con los ángulos B y *b*, C y *c*, &c. Ademas, ya que por la naturaleza de los polígonos son iguales los lados AB, BC, CD, &c., del mismo modo que *ab*, *cb*, *cd*, *&c.*, es claro que tenemos las proporciones AB : *ab* : : BC: *bc* : : CD : *cd*, &c. : luego estas dos figuras tienen los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, y por consiguiente son semejantes. * * Def. 2. Lib. 3.

Corolario. Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados estan entre sí como los lados homólogos, y sus superficies como los quadrados de estos mismos lados. * * 27. 3.

Escolio. El ángulo de un polígono regular se determina por el número de sus lados, como el de un polígono equiángulo. *Véase la prop. XXI, lib. I.*

PROPOSICION II.

TEOREMA.

Qualquiera polígono regular puede estar inscrito y circunscrito á un círculo.

Sea ABCDE el polígono de que tratamos. Fig. 156.

Imagínese que hacemos pasar una circunferencia por los tres puntos A, B, C; sea O su centro, y OP la perpendicular baxada al medio del lado BC. Tírense AO y OD.

Los dos quadriláteros OPCD y OPBA pueden sobreponerse uno á otro; pues en efecto, el lado OP es comun, el ángulo OPC=OPB, por ser ambos rectos: luego el lado PC se sobrepondrá á su igual PB, y el punto C caerá en B. Ademas, por la naturaleza del polígono, el ángulo PCD=PBA: luego CD tomará la direccion BA, y por ser CD=BA, el punto D coincidirá con A, y los dos quadriláteros se ajustarán perfectamente uno con otro. Es, pues, la distancia OD igual á AO, y por consiguiente la circunferencia que pasa por los tres puntos A, B, C, pasará tambien por el punto D; pero por un raciocinio semejante, probaremos que la circunferencia que pasa por los tres vértices B, C, D, pasará por el inmediato E, y así sucesivamente: luego la misma circunferencia que pasa por los puntos A, B, C, pasa por todos los vértices de los ángulos del polígono, y dicho polígono queda inscrito en esta circunferencia.

En segundo lugar, con respecto á esta circunferencia, todos los lados AB, BC, CD, &c., son cuerdas iguales, y por lo mismo estan equidistantes del centro*: luego si desde el punto O, como centro, y con el radio OP: trazamos una circunferencia, dicha circunferencia será tangente en la mitad del lado BC, y de todos los demas del polígono, y la circunferencia quedará inscrita en el polígono, ó el polígono circunscrito á la circunferencia.

Escolio 1. El punto O, centro comun del círculo inscrito y del circunscrito, puede considerarse tambien como centro del polígono, y por esta razon se llama *ángulo del centro* el ángulo AOB, formado por los dos radios tirados á los extremos de un mismo lado AB.

Una vez que todas las cuerdas AB, BC, &c., son iguales, claro está que todos los ángulos del centro lo son tambien; y que así el valor de cada uno se halla dividiendo quatro ángulos rectos por el número de los lados del polígono.

Escolio 2. Para inscribir un polígono regular de cierto número de lados en una circunferencia dada, basta dividirla en tantas partes iguales como lados debe tener el polígono; porque, siendo iguales los arcos, lo serán tambien las cuerdas AB, BC, CD, &c.; los triángulos ABO, BOC, COD, &c., serán iguales tambien, porque son equiángulos entre sí: luego todos los ángulos ABC, BCD, CDE, &c., serán iguales, y la figura ABCDE, &c., será un polígono regular.

PROPOSICION III.

PROBLEMA.

Inscribir un quadrado en una circunferencia dada.

Tírense dos diámetros AC, BD que se corten en ángulos rectos; únanse los extremos A, B, C, D, y la figura ABCD será el quadrado inscrito.

Porque siendo iguales los ángulos AOB, BOC, &c., tambien lo son las cuerdas AB, BC, &c.

Escolio. Por ser el triángulo BOC rectángulo é isósceles, tenemos * BC : BO : : $\sqrt{2}$: 1 : luego *el lado del quadrado inscrito es al radio como la raiz quadrada de 2 es á la unidad.* * II. 3.

PROPOSICION IV.

PROBLEMA.

Inscribir un exâgono regular y un triángulo equilátero en una circunferencia dada. Fig. 158.

Supongamos resuelto ya el problema, y sea AB un lado del exâgono inscrito; tirando los radios AO, OB, digo que el triángulo AOB será equilátero.

Porque el ángulo AOB es la sexta parte de quatro ángulos rectos; y así, tomando el ángulo recto por unidad, tendremos AOB $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Los otros dos angulos ABO y BAO del mismo triángulo valen juntos $2-\frac{2}{3}$ ó $\frac{4}{3}$, y como son iguales, cada uno vale $\frac{2}{3}$: luego el triángulo ABO es equilátero, y el lado del exâgono inscrito es igual al radio.

Dedúcese de aquí que para inscribir un exâgono regular en una circunferencia dada, es preciso llevar el radio seis veces sobre la circunferencia, y se concluirá así en el mismo punto en que se empezó.

Inscrito ya el exâgono ABCDEF: formaremos el triángulo equilátero ACE, uniendo los vértices de los ángulos uno si y otro no.

* 14. 3. *Escolio.* La figura ABCO es un paralelógramo, y aun un losango, pues $AB=BC=CO=AO$: luego * la suma de los quadrados de las diagonales $(AC)^2+(BO)^2$ es igual á la de los quadrados de los lados, que es $4(AB)^2$ ó $4(BO)^2$; quitando de ambas partes $(BO)^2$, quedará $(AC)^2=3(BO)^2$: luego $(AC)^2:(BO)^2::3:1$, ó $AC:BO::\sqrt{3}:1$: luego *el lado del triángulo equilátero inscrito es al radio, como la raiz quadrada de 3 es á la unidad.*

PROPOSICION V.

PROBLEMA.

Inscribir en un círculo dado un decágono regular, luego un pentágono y un pentedecágono.

Fig. 159. * Prob. 4. Lib. 3. Divídase el radio OA en media y extrema razon en el punto M*, tómese la cuerda AB igual al segmento mayor OM, y AB será el lado del decágono que debemos llevar diez veces sobre la circunferencia.

Porque tirando MB, tenemos por construccion $AO:OM::OM:AM$; ó, por ser $AB=OM$, $AO:AB::AB:AM$: luego los triángulos ABO y AMB tienen comun un ángulo A comprehendido entre lados proporcio-
* 20. 3. nales: luego son semejantes *. El triángulo OAB es isósceles, y por consiguiente el triángulo AMB lo es tambien, y tenemos $AB=BM$; ademas $AB=OM$: luego tambien $BM=OM$: luego el triángulo BMO es isósceles.

El ángulo AMB, externo del triángulo isósceles
* 20. 1. BMO, es duplo del interno O*; pero el ángulo $AMB=MAB$: luego el triángulo OAB es tal, que cada uno de los ángulos de la base OAB ó OBA es duplo del ángulo del vértice O: luego los tres ángulos del triángulo valen cinco veces el ángulo O, y así este es la quinta parte de dos ángulos rectos, ó la décima de quatro:

luego el arco AB es la décima parte de la circunferencia, y la cuerda AB es el lado del decágono regular.

Corolario I. Si unimos de dos en dos los ángulos del decágono regular, formaremos el pentágono regular ACEGI.

Corolario II. Siendo siempre AB el lado del decágono, sea AL el del exâgono; entónces el arco BL será, respecto á la circunferencia, $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, ó $\frac{1}{15}$: luego la cuerda BL será el lado del pentedecágono, ó polígono regular de 15 lados. Vemos al mismo tiempo que el arco CL es la tercera parte de CB.

Escolio. Habiendo inscrito un polígono regular, si dividimos por mitad los arcos que sus lados subtenden, y tiramos las cuerdas de los medios-arcos, estas formarán un nuevo polígono regular de un número duplo de lados; así vemos que el quadrado puede servir para inscribir sucesivamente los polígonos regulares de 8, 16, 32, &c., lados. Igualmente el exâgono servirá para inscribir los polígonos regulares de 12, 24, 48, &c, lados; el decágono para los polígonos de 20, 40, 80, &c., lados; el pentedecágono para los de 30, 60, 127, &c., lados (1).

PROPOSICION VI.

PROBLEMA.

Dado el polígono regular inscrito ABCD, *&c., circunscribir á la misma circunferencia un polígono semejante.* Fig. 160.

(1) Hasta ahora se ha creido que solo podian inscribirse estos polígonos por la Geometría superior, ó lo que es todo uno, por la resolucion de las equaciones de primero y segundo grado; pero un Geómetra de Brunsvik, llamado Ch. Fred. Gauss, acaba de probar, en una obra intitulada *Disquisitiones Arithmeticæ, Lipsiæ*, 1801, que por el mismo método se puede inscribir el polígono regular de 17 lados, y en general el de $2^n + 1$ lados, con tal que $2^n + 1$ sea un número primo.

* 10. 2. En el punto F, medio del arco AB, tírese la tangente GH, que será paralela á AB *; hágase lo mismo en cada uno de los demas arcos BC, CD, &c., y estas tangentes formarán por sus intersecciones el polígono regular circunscrito GHIK, &c., semejante al polígono inscrito.

Es fácil de ver desde luego que los tres puntos O, B, H estan en línea recta, porque los triángulos rectángulos OTH, OHN tienen comun la hypotenusa OH,
* 18. 1. y el lado OT=ON: luego son iguales *, y el ángulo LOH=HON, y por consiguiente la línea OH pasa por el punto B, mitad del arco TN. Por la misma razon el punto I está en la prolongacion de OC, &c. Pero, por ser GH paralela á AB, y HI á BC, el ángulo GHI=
* 28. 1. ABC *; tambien HIK=BCD, &c.: luego los ángulos del polígono circunscrito son iguales á los del inscrito. Ademas, estas mismas paralelas nos dan GH : AB :: OH : OB, y HI : BC :: OH : OB: luego GH : AB :: HI : BC. Pero AB=BC: luego GH=HI. Por la misma razon HI=IK, &c.: luego los lados del polígono circunscrito son iguales entre sí: luego este polígono es regular y semejante al inscrito.

Corolario I. Recíprocamente, si nos diesen el polígono circunscrito GHIK, &c., y hubiésemos de trazar por medio de él el polígono inscrito ABC, &c., se echa de ver que bastaria tirar á los vértices G, H, I, &c., del polígono dado las líneas OG, GH, &c., que encontrarian á la circunferencia en los puntos A, B, C, &c.; se tirarian luego por ellos las cuerdas AB, BC, &c., que formarian el polígono inscrito. Tambien se podria en este caso tirar solamente por los puntos de contacto T, N, P, &c., las cuerdas TN, NP, &c., que formarian igualmente un polígono inscrito semejante al circunscrito.

Corolario II. Luego podemos circunscribir á un círculo dado todos los polígonos regulares que sabemos inscribir en dicho círculo y recíprocamente.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

El área de un polígono regular es igual á su perímetro multiplicado por la mitad del radio del círculo inscrito.

Sea, por exemplo, el polígono regular GHIK, &c. Fig. 160.

El triángulo GOH tiene por medida $GH \times \frac{1}{2}OT$, y el triángulo OHI tiene por medida $HI \times \frac{1}{2}ON$; pero $ON = OT$: luego los dos triángulos juntos tienen por medida $(GH + HI) \times \frac{1}{2}OT$. Continuando así con los demas triángulos, veremos que la suma de todos ellos, ó el polígono entero, tiene por medida la suma de las bases GH, HI, IK, &c., ó el perímetro del polígono, multiplicado por $\frac{1}{2}OT$, mitad del radio del círculo inscrito.

Escolio. El radio OT del círculo inscrito no es otra cosa que la perpendicular tirada desde el centro á uno de los lados; algunas veces le llamamos *apotema* del polígono.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

Los perímetros de los polígonos regulares de un mismo número de lados siguen la razon de los radios de los círculos inscritos y circunscritos, y sus superficies la de los quadrados de estos mismos radios.

Sea AB un lado de uno de los polígonos de que tratamos, O su centro, y por consiguiente OA el radio del círculo circunscrito, y OD perpendicular á AB, el radio del círculo inscrito. Sea igualmente *ab* el lado de otro polígono semejante, *o* su centro, *oa* y *od* los radios de los círculos circunscritos é inscritos. Fig. 161.

Los perímetros de estos dos polígonos estan entre sí como los lados AB y *ab*; pero los ángulos A y *a* son iguales por ser cada uno la mitad del ángulo del polígono, y lo mismo se verifica con los ángulos B y *b*: luego los triángulos ABO, *abo* son semejantes, lo mismo que los triángulos rectángulos ADO, *ado*: luego AB : *ab* : : AO : *ao* : : DO : *do*: luego los perímetros de los polígonos estan entre sí como los radios AO, *ao* de los círculos circunscritos, y como los radios DO, *do* de los círculos inscritos.

Las superficies de estos mismos polígonos estan entre sí como los quadrados de los lados homólogos AB, *ab*, y tambien como los quadrados de los radios de los círculos circunscritos, ó como los quadrados de los radios OD y *od* de los círculos inscritos.

PROPOSICION IX.

LEMA.

Fig. 162. *Toda línea curva ó polígona que cubre de un extremo á otro la línea convexâ* AMB *es mas larga que la línea cubierta* AMB.

Ya hemos dicho que por línea *convexâ* entendemos una línea curva ó polígona, ó en parte curva, y en parte polígona, tal que una recta solo puede cortarla en dos puntos. Si la línea AMB tuviese partes entrantes ó sinuosidades, dexaria de ser convexâ, porque bien se echa de ver que una línea recta puede cortarla en mas de dos puntos. Los arcos de círculo son por precision convexôs; pero la proposicion de que tratamos se extiende á una línea qualquiera que cumple la condicion que se exîge.

Esto sentado, si la línea AMB no es menor que todas las que las cubren, habrá entre estas alguna línea mas corta que todas las demas, que será menor que AMB, ó á lo mas igual á ella. Sea ACDEB esta línea que cubre; entre las dos líneas tírese por donde se quiera la recta PQ, que no encuentre á la línea AMB, ó á lo ménos que no haga mas que pasarla rasando; la recta PQ es mas corta que PCDEQ: luego si á la parte PCDEQ substituimos la línea recta PQ, tendremos la línea APBQ mas corta que APDQB. Pero, por hipótesis, esta debe ser la mas corta de todas: luego será absurdo este supuesto, y todas las líneas que cubren serán mas largas que AMB.

PROPOSICION X.

LEMA.

Dadas dos circunferencias concéntricas, podemos inscribir siempre en la mayor un polígono regular, cuyos lados no encuentren á la menor, y podemos igualmente circunscribir á la menor un polígono regular, cuyos lados no encuentren á la mayor; de modo que en ambos casos los lados del polígono descrito quedarán encerrados entre las dos circunferencias.

Sean CA y CB los radios de las dos circunferencias dadas. Fig. 164.

Por el punto A tírese la tangente DE, que termine en la circunferencia grande en D y E; inscríbase en esta circunferencia uno de los polígonos que se pueden inscribir por los problemas anteriores, divídanse luego por mitad los arcos que los lados subtenden, y tírense las cuerdas de estos arcos pequeños; resultará un polígono regular de un número duplo de lados. Continúese la biseccion de los arcos, hasta que demos con un arco menor que DBE. Sea MBN este arco, cuya mitad ó punto medio suponemos en B, claro está que la cuerda MN distará mas del centro que DE, y que así el polígono regular, cuyo lado es MN no puede encontrar á la circunferencia, cuyo radio es CA.

Sentadas las mismas cosas, tírense CM y CN, que encuentren á la tangente DE en P y Q; PQ será el lado de un polígono circunscrito á la circunferencia pequeña, semejante al polígono inscrito en la grande, cuyo lado es MN Claro está tambien que el polígono circunscrito, que tiene por lado PQ, no podrá encontrar á la circunferencia grande, pues CP es menor que CM.

Luego por la misma construccion podemos trazar un polígono regular inscrito en la circunferencia grande, y un polígono semejante circunscrito á la pequeña, los quales tendrán sus lados comprehendidos entre ambas circunferencias.

Escolio. Si tenemos dos sectores concéntricos FCG y ICH, tambien podremos inscribir en el mayor una *porcion de polígono regular*, ó circunscribir al menor una porcion de polígono semejante, de modo que los contornos de los dos polígonos esten ceñidos á su circunferencia: bastará dividir sucesivamente el arco FBG en 2, 4, 8, 16, &c., partes iguales, hasta dar con una parte menor que DBE.

Llamamos aquí *porcion de polígono regular* la figura terminada por una serie de cuerdas iguales, inscritas en el arco FG de un extremo á otro. Esta porcion tiene las principales propiedades de los polígonos regulares; tiene los ángulos y lados iguales, y es al mismo tiempo posible de inscribir y circunscribir á un círculo. Sin embargo, no seria parte de un polígono llamado con propiedad *regular*, sino quando el arco que uno de sus lados subtende fuese parte alicuota de la circunferencia.

PROPOSICION XI.

TEOREMA.

Las circunferencias de los círculos estan entre sí como los radios, y sus superficies como los quadrados de dichos radios.

Señalemos, para mayor brevedad, por *cir.* CA la circunferencia, cuyo radio es CA: digo que tendremos *circ.* CA : *circ.* OB : : CA : OB.

Porque si esta proposicion no fuese cierta, CA seria á OB como *circ.* CA es á un quarto término mayor ó menor que *circ.* OB. Supongámosle menor, y sea, si es posible, CA : OB : : *circ.* CA : *circ.* OD.

Inscríbase en la circunferencia, cuyo radio es OB un polígono regular EFGKLE, cuyos lados no encuentren á la circunferencia trazada con el radio OD *; inscríbase un polígono semejante MNPSTM en la circunferencia, cuyo radio es CA. * Pr. 10.

Esto sentado, por ser estos polígonos semejantes, sus perímetros MNPSM y EFGKE son entre sí como los radios CA y OB de los círculos circunscritos *; y tendremos MNPSM : EFGKE : : CA : OB; pero, por hipótesis, CA : OB : : *circ.* CA : *circ.* OD : luego MNPSM : EFGKE : : *circ.* CA : *circ.* OD. Pero esta proporcion es imposible, porque el contorno MNPSM es menor que *circ.* CA *, y al contrario EFGKE es mayor que *circ.* OD : luego es imposible que sea CA á OB como *circ.* CA á una circunferencia menor que *circ.* OB; ó, en términos mas generales, es imposible que un radio sea á otro radio como la circunferencia trazada con el primer radio es á una circunferencia menor que la del segundo radio. * Pr. 8.

De aquí deduzco que tampoco puede ser que sea CA á OB como *circ.* CA es á una circunferencia mayor que *circ.*; porque si esto fuera, saldria, mudando las razones, OB es á CA como una circunferencia mayor que *circ.* OB es á *circ.* CA, ó lo que es todo uno, como *circ.* OB es á una circunferencia menor que *circ.* CA: luego un radio seria á otro radio como la circunferencia del primero es á una circunferencia menor que la del segundo, lo qual ya se ha demostrado que es imposible.

Valiéndonos de un raciocinio y de una construccion enteramente parecidas, demostrariamos que las superficies de los círculos son como los quadrados de sus ra-

...

dios. No entraremos en mas por menores sobre esta proposicion, que ademas es un corolario de la siguiente.

Fig. 166. *Corolario.* Los arcos semejantes AB y DE siguen la razon de sus radios AC y DO, y sus sectores semejantes ACB y DOE la de los quadrados de estos mismos radios.

Porque por ser semejantes los arcos, el ángulo C es
* Def. 3. Lib. 2. igual al angulo O *; pero el ángulo C es á quatro ángulos rectos como el arco AB es á la circunferencia entera descrita con el radio AC *, y el ángulo O es á
* 17. 2. quatro ángulos rectos como el arco DE es á la circunferencia descrita con el radio OD: luego los arcos AB y DE son entre sí como las circunferencias de que son parte, y estas circunferencias son como los radios AC, DO: luego *arco* AB: *arco* DE : : AC: DO.

Por la misma razon los sectores ACB y DOE son como los círculos enteros, y estos son como los quadrados de los radios: luego *sect.* ACB: *sect.* DOE : : $(AC)^2$ $(DO)^2$.

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

La superficie del círculo es igual al producto de su circunferencia por la mitad de su radio.

Fig. 167. Llamemos *sup.* CA la superficie del círculo, cuyo radio es CA; digo que tendremos *sup.* CA $= \frac{1}{2}$CA $\times$ *circ.* CA.

Porque si $\frac{1}{2}$CA $\times$ *circ.* CA no fuese el área del círculo trazado con el radio CA, esta cantidad será la medida mayor ó menor. Supongamos primeramente que es la medida de un círculo mayor, y sea, si es posible, $\frac{1}{2}$CA $\times$ *circ.* CA $=$ *sup.* CB.

Al círculo, cuyo radio es CA, circunscribásele un polígono regular DEFG, &c., cuyos lados no encuen-
* Pr. 10. tren á la circunferencia descrita con el radio CB *;

la superficie de este polígono será igual á su contorno DE + EF + FG +, &c., multiplicado por $\frac{1}{2}$AC *; pero el perímetro del polígono es mayor que la circunferencia inscrita, pues la rodea por todos lados: luego la superficie del polígono DEFG, &c., es mayor que $\frac{1}{2}$AC × *circ.* AC, que es la medida del círculo, cuyo radio es CB; y por lo mismo el polígono seria mayor que el círculo. Pero al contrario es menor, pues está dentro del él: luego es imposible que $\frac{1}{2}$CA × *circ.* CA sea mayor que *sup.* CA; ó en otros términos, es imposible que la circunferencia de un círculo multiplicada por la mitad de su radio sea medida de un círculo mayor. * Pr. 7.

Digo en segundo lugar que dicho producto tampoco puede ser la medida de un círculo menor; y para no mudar figura, supondré que este círculo es el trazado con el radio CB. Es, pues, preciso probar que $\frac{1}{2}$CB × *circ.* CB no puede ser medida de un círculo mas pequeño, v. gr. que el que tiene por radio á CA. Con efecto, sea, si es posible, $\frac{1}{2}$CB × *circ.* CB = *sup.* CA.

Hecha la misma construccion que en el caso anterior, la superficie del polígono DEFG, &c., tendrá por medida (DE + EF + FG +, &c.) × $\frac{1}{2}$CA; pero el contorno DE + EF + FG +, &c., es menor que *circ.* CB que le rodea por todas partes: luego el área del polígono es menor que $\frac{1}{2}$CA × *circ.* CB, y con mayor razon menor que $\frac{1}{2}$CB × *circ.* CB. Esta última cantidad es, por suposicion, la medida del círculo trazado con el radio CA: luego el polígono seria menor que el círculo inscrito, lo qual es un absurdo: luego es imposible que la circunferencia de un círculo multiplicada por la mitad de su radio sea la medida de un círculo menor; y finalmente la medida de la superficie de un círculo es su circunferencia multiplicada por la mitad de su radio.

Corolario I. La superficie de un sector es igual á su arco multiplicado por la mitad de su radio. Fig. 168.

Porque el sector ACB es al círculo entero como el arco AMB es á la circunferencia entera ABD *, ó como AMB × ½AC es á ABD × ½AC. Pero el círculo entero es = ABD × ½AC : luego la medida del sector es AMB × ½AC.

Corolario II. Llamemos π la circunferencia, cuyo diámetro es la unidad. Una vez que las circunferencias siguen la razon de sus radios ó diámetros, podremos formar esta proporcion : el diámetro 1 es á su circunferencia π como el diámetro 2CA es á la circunferencia, cuyo radio es CA; de modo que será $1 : \pi :: 2CA : circ.\ CA$: luego *circ.* $CA = 2\pi \times CA$. multiplicando ambos términos por ½CA, tendremos ½CA × *circ.* $CA = \pi \times (CA)^2$, ó *sup.* $CA = \pi\ (CA)^2$: luego *la superficie de un círculo es igual al producto del quadrado de su radio por el número constante* π, *que representa la circunferencia, cuyo diámetro es* 1, *ó la razon de la circunferencia al diámetro.*

Del mismo modo la superficie del círculo que tiene por radio OB será igual á $\pi \times (OB)^2$; pero $\pi\ (CA)^2 : \pi \times (OB)^2 :: (AC)^2 : (OB)^2$: luego *las superficies de los círculos son como los quadrados de sus radios*, lo que concuerda con lo demostrado en el teorema anterior.

Escolio. Ya hemos dicho que el problema de la quadratura del círculo consiste en hallar un quadrado igual en superficie á un círculo de radio conocido; pero acabamos de probar que el círculo es equivalente al rectángulo formado con la circunferencia y la mitad del radio, y este rectángulo se transforma en quadrado, tomando una media proporcional entre sus dos dimensiones *: luego el problema de la quadratura del círculo se reduce á hallar la circunferencia conocido el radio, y para esto basta conocer la razon de la circunferencia al radio ó al diámetro.

* Pr. 6. Lib. 3.

Hasta ahora solo se ha podido determinar esta razon por aproxîmarnos; pero se han continuado estas tanto, que nada adelantariamos en realidad con saber la razon exâcta. Así esta qüestion, en que se han ocupado mucho los Geómetras quando eran ménos conocidos los métodos de aproxîmacion, está ahora despreciada entre las qüestiones inútiles, en que solo deben ocuparse los que empiezan á adquirir las primeras nociones de Geometría.

Archîmedes ha hallado, que la razon de la circunferencia al diámetro está comprehendida entre $3\frac{10}{70}$, y $3\frac{10}{71}$; así $3\frac{1}{7}$, ó $\frac{22}{7}$ es un valor muy aproxîmado ya al número que hemos representado por π, y esta primera aproxîmacion es la mas usada á causa de su sencillez. *Mecio* ha hallado por el mismo número el valor mucho mas aproxîmado, y es $\frac{355}{113}$. En fin, el valor de π, aproxîmado hasta cierto número de decimales, ha sido hallado por otros calculadores, y es 3,14159265358979 32, &c., y ha habido quien ha tenido la paciencia de continuar estas decimales hasta ciento veinte y siete, y aun hasta ciento y cincuenta. Bien se conoce que una aproxîmacion semejante equivale á la razon exâcta, y que no se conocen mejor las raices de las potencias imperfectas.

En los problemas siguientes se explicarán los dos métodos elementales mas sencillos para sacar estas aproxîmaciones.

PROPOSICION XIII.

PROBLEMA.

Dadas las superficies de un polígono regular inscrito y de un polígono semejante circunscrito; hallar las de los polígonos regulares inscrito y circunscrito de un número duplo de lados.

Sea AB el lado del polígono dado inscrito, EF paralela á AB, el del polígono semejante circunscrito, C, el centro del círculo. Fig. 169.

Si tiramos la cuerda AM y las tangentes AP, BQ, la cuerda AM será el lado del polígono inscrito de un número duplo de lados, y PQ, duplo de PM, será el del polígono semejante circunscrito *. Esto sentado, co- * Pr. 6.

mo siempre se verificaria esta misma construccion en los diferentes ángulos iguales á ACM, basta considerar el ángulo ACM solo, y los triángulos contenidos serán entre sí como los polígonos enteros.

Sea A la superficie del polígono inscrito, cuyo lado es AB, B la superficie del polígono semejante circunscrito, A′ la superficie, cuyo lado es AM, B′ la del polígono semejante circunscrito; A y B son conocidos, y se trata de hallar A′ y B′.

1.° Los triángulos ACD y ACM, cuyo vértice comun es A, estan entre sí como sus bases CD y CM; por otra parte estos triángulos son como los polígonos A y A′, de que son parte: luego A : A′ : : CD : CM. Los triángulos CAM y CME, cuyo vértice comun es M, siguen la razon de sus bases CA y CE; estos mismos triángulos son ademas como los polígonos A′, y B′, de que son parte: luego A′ : B : : CA : CE. Pero las paralelas AD y ME nos dan CD : CM : : CA : CE: luego A : A′ : : A′ : B: luego el polígono A′, que es uno de los que buscamos, es medio proporcional entre los dos polígonos conocidos A y B, y tenemos por consiguiente $A' = \sqrt{(A \times B)}$.

2.° Por ser comun la altura CM, el triángulo CPM es al triángulo CPE como PM es á PE; pero por dividir la línea CP en dos partes iguales el ángulo MCE,
* 17. 3. tenemos * PM: PE : : CM : CE : : CD : CA : : A : A′: luego CPM : CPE : : A y A′, y sumando CPM : CPM + CPE, ó CME : : A : A + A′. Pero CMPA, ó 2CMP, y CME estan entre sí como sus respectivos polígonos B′ y B : luego B′ : B : : 2A : A + A′. Ya hemos determinado el valor de A′; esta nueva proporcion determinará el de B, y tendremos $B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$ luego por medio de los polígonos A y B es fácil hallar los polígonos A′ y B′ que tienen duplo número de lados.

PROPOSICION XIV.

PROBLEMA.

Hallar la razon aproxîmada de la circunferencia al diámetro.

Sea el radio del círculo $= 1$, el lado del quadrado inscrito será $\sqrt{2}$ *; el del quadrado circunscrito es igual al diámetro 2: luego la superficie del quadrado inscrito es $= 2$, y la del quadrado circunscrito $= 4$. Ahora si hacemos $A = 2$ y $B = 4$, hallaremos por el problema anterior el octógono inscrito $A' = \sqrt{8} = 2{,}8284271$, y el octógono circunscrito $B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3{,}3137085$. Conocidos así el octógono inscrito y circunscrito, hallaremos por medio de ellos los polígonos de un número duplo de lados; será preciso suponer de nuevo $A = 2{,}8284271$, $B = 3{,}3137085$, y tendremos $A' = \sqrt{(A \times B)} = 3{,}0614674$, y $B' = \frac{2A \times B}{A + A'} = 3{,}1825979$. Despues estos polígonos de 16 lados nos servirán para conocer los de 32, y continuaremos así hasta que el cálculo no nos dé diferencia alguna entre el polígono inscrito y el circunscrito. En llegando á este punto inferiremos que el último resultado es el valor del círculo, porque este siempre debe estar comprehendido entre el polígono inscrito y circunscrito: luego si estos no se diferencian entre sí hasta cierto número de decimales, tampoco el círculo diferirá en este número.

* Pr. 3.

Véase aquí el cálculo de estos polígonos continuado hasta que no discrepan en la séptima decimal.

Número de los lados.	Polígono inscrito.	Polig. cir.
4.	2,0000000.	4,0000000.
8.	2,8284271.	3,3137085.
16.	3,0614674.	3,1825979.
32.	4,1214451.	3,1517249.
64.	3,1365485.	3,1441184.
128.	3,1403311.	3,1422236.
256.	3,1412772.	3,1417504.
512.	3,1415138.	3,1416321.
1024.	3,1415729.	3,1416025.
2048.	3,1415877.	3,1415951.
4096.	3,1415914.	3,1415933.
8192.	3,1415923.	3,1415928.
16384.	4,1415925.	3,1415927.
32768.	4,1415926.	3,1415926.

De aquí deduzco que la superficie del círculo es = 3,1415926. Podria haber duda sobre la última decimal á causa de los errores que provienen de las partes despreciadas; pero se ha hecho el cálculo con una decimal mas, para asegurarse del resultado que acabamos de hallar hasta la última cifra decimal.

Ya que la superficie del círculo es igual á la semicircunferencia multiplicada por el radio, siendo el radio = 1, la semicircunferencia es 3,1415926; ó siendo el diámetro 1, la circunferencia es 3,1415926: luego la razon de la circunferencia al diámetro hallada arriba por $\pi = 3,1415926$.

PROPOSICION XV.

LEMA.

Fig. 170. *El triángulo* CAB *es equivalente al triángulo isósceles* DCE, *que tiene el mismo ángulo* C, *y cuyo lado* CE *ó* CD *es medio proporcional entre* CA *y* CB. *Ademas, si es-*

recto el ángulo CAB, *la perpendicular* CF, *baxada á la base del triángulo isósceles, será media proporcional entre el lado* CA *y la semisuma de los lados* CA *y* CB.

Porque 1.°, por ser comun el ángulo C, el triángulo ABC es al triángulo DCE como $AC \times CB$ es á $DC \times CE$, ó $(DC)^2$ *: luego estos triángulos serán equivalentes, si $(DC)^2 = AC \times CB$, ó si DC es media proporcional entre AC y CB. * 24. 3.

2.° Ya que la perpendicular CGF corta en dos partes iguales al ángulo ACB, tenemos AG : GB : : AC : CB, de donde sacamos, *componendo* AG : AG+GB ó AB : : AC : AB+CB; pero AG es á AB como el triángulo ACG es al triángulo ACB ó 2CDF; ademas, si el ángulo A es recto, los triángulos rectángulos ACG y CMF son semejantes, y dan ACG : CDF : : $(AC)^2$: : $(CF)^2$: luego $(AC)^2$: $2(CF)^2$: : AC : AC+CB. Multiplicando la segunda razon por AC, los antecedentes serán iguales, y tendremos por consiguiente $2(CF)^2 = AC \times (AC + CB)$, ó $(CF)^2 = AC \times \left(\frac{AC+CB}{2}\right)$: luego 2.°, si el ángulo A es recto, la perpendicular CF será media proporcional entre el lado AC, y la semisuma de los lados AC+CB. * 17. 3.

PROPOSICION XIV.

PROBLEMA.

Hallar un círculo que difiera tan poco como se quiera de un polígono regular dado.

Propongámonos, por exemplo, el quadrado BMNP.

Desde el centro C báxese al lado MB la perpendicular CB:

El círculo descrito con el radio CA está inscrito en el quadrado, y el descrito con el radio BC está circunscrito á dicho quadrado; el primero será menor que el

• • •

quadrado, y el segundo mayor: se trata de aproxîmar estos límites.

Tómense CD y CE iguales cada una á la media proporcional entre CA y CB, tírese ED, y el triángulo isósceles CDE será equivalente al triángulo CAB *. Hágase lo mismo en cada uno de los ocho triángulos que componen el quadrado, y formaremos así un octógono regular equivalente al quadrado BMNP. El círculo descrito con el radio CF, medio propoporcional entre CA y $\frac{CA+CB}{2}$, quedará inscrito en el octógono, y el círculo descrito con el radio CD quedará circunscrito. Así que, el primero será menor que el quadrado dado, y el segundo mayor.

* Pr. 15.

Si transformamos del mismo modo el rectángulo CDF en un triángulo isósceles equivalente, formaremos un polígono regular de 16 lados equivalente al quadrado propuesto. El círculo inscrito en este polígono será menor que el quadrado, y el circunscrito será mayor.

Podemos continuar así hasta que la razon entre el radio del círculo inscrito, y el del circunscrito difieran tan poco, como se quiera, de la igualdad; en cuyo caso ambos círculos podrán considerarse como equivalentes al quadrado propuesto.

Escolio. Á esto se reduce la investigacion de los radios sucesivos. Sea a el radio del círculo inscrito en uno de los polígonos hallados, b el radio del círculo circunscrito á este mismo polígono; sean a' y b' los radios semejantes para el polígono siguiente, que tiene duplo número de lados. Segun lo que hemos demostrado, b' es una media proporcional entre a y b, y a' es tambien una media proporcional entre a y $\frac{a+b}{2}$; de modo que tendremos $b'=\sqrt{(a\times b)}$, y $a'=\sqrt{\left(a\times\frac{a+b}{2}\right)}$: luego conocidos los radios a y b de un polígono, deduciremos fácilmente los radios a' y b' del polígono siguiente, y continuaremos así hasta que sea insensible la diferencia entre los dos radios, entónces uno de ellos será el radio del círculo equivalente al quadrado ó polígono propuesto.

Este método es fácil de practicar por líneas, pues se reduce á hallar sucesivamente medias proporcionales entre líneas conocidas; pero es mucho mejor por números, y es uno de los mas cómodos que puede suministrarnos la Geometría elemental para hallar con prontitud la razon aproxîmada de la circunferencia al diámetro. Sea el lado del quadrado $= 2$, el primer radio inscrito CA será $= 1$, y el primer radio circunscrito CB será $= \sqrt{2}$ ó 1,4142136. Haciendo, pues, $a = 1$, $b =$ 1,4142136, hallaremos $b' = 1,1892071$, y $a' = 1,0986841$. Estas cantidades servirán para calcular las siguientes, segun la ley de continuacion.

Véase aquí el resultado del cálculo hecho hasta siete ú ocho cifras por las tablas comunes de logaritmos.

Radios de los círc. circuns.	Radios de los círc. inscr.
1,4142136.	1,0000000.
1,1892071.	1,0986841.
1,1430500.	1,1210863.
1,1320149.	1,1265639.
1,1392862.	1,1279257.
1,1286663.	1,1282657.

Ahora que la primera mitad de las cifras es una misma por ambos lados, podremos tomar en lugar de los medios geométricos los medios aritméticos, que solo discrepan de los otros en las cifras ulteriores. Así se abrevia mucho la operacion, y los resultados son:

Radios de los círc. circuns.	Radios de los círc. inscr.
1,1283360.	1,1283508.
1,1283934.	1,1283721.
1,1283827.	1,1283774.
1,1283801.	1,1283787.
1,1283794.	1,1283791.
1,1283792.	1,1283792.

Luego 1,1283792 es con corta diferencia el radio del círculo igual en superficie al quadrado, cuyo lado es 2. De aquí es fácil sacar la razon de la circunferencia al diámetro, pues hemos demostrado que la superficie del círculo es igual al quadrado de su radio multiplicado por el número π: luego si dividimos la superficie 4 por el quadrado de 1,1283792, tendremos el valor de π, que se halla por este cálculo de 3,141596, &c., como lo hemos hallado por otro método.

APÉNDICE AL LIBRO IV.

DEFINICIONES.

1. Se llama *máxîmo* la cantidad mayor entre todas las de su especie; *mínimo* la menor.

Así el diámetro del círculo es un *máxîmo* entre todas las líneas tiradas en él, y que rematan por ambas partes en la circunferencia, y la perpendicular es un *mínimo* entre todas las rectas tiradas desde un punto dado á una línea dada.

2.° Se llaman figuras *isoperímetras* á las que tienen iguales sus perímetros.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Entre todos los triángulos de igual base y perímetro, el triángulo máxîmo es aquel en que los dos lados, que no estan determinados, son iguales.

Sea AC = CB, y AM + MB = AC + CB: digo que el triángulo isósceles ACB es mayor que el triángulo AMB, que tiene la misma base y perímetro. Fig. 172.

Desde el punto C, como centro, y con el radio CA = CB, descríbase una circunferencia que encuentre en D á la prolongacion de CA; tírese DB, y el ángulo DBA, inscrito en este círculo, será recto *. Prolónguese DB hácia N, hágase MN = MB, y tírese AN. En fin, desde los puntos M y C báxense MP y CG, perpendiculares á DN. * 15. 2.

Ya que CB = CD y MN = MB, tenemos AC + CB = AD, y AM + BM = AM + MN. Pero AC + CB = AM + MB: luego AD = MA + NM: luego AD > AN; pero si la obliqüa AD es mayor que la obliqüa AN, distará mas de la perpendicular AB: luego DB > BN, y BG, que es mitad de BD *, será mayor que BP, mitad de BN. Pero los triángulos ABC y ABM, que tienen una misma base AB, estan entre sí como sus alturas BG y BP: luego por ser BG > BP, el triángulo isósceles ABC es mayor que ABM, que tiene la misma base y perímetro, y que no es isósceles. * 12. 1.

PROPOSICION II.

TEOREMA.

Entre todos los polígonos isoperímetros de igual número de lados, el máximo tiene sus lados iguales.

Porque sea ABCDEF el polígono *máxîmo*. Si el la- Fig. 173.

do BC no es igual á CD, fórmese sobre la base BD un triángulo isósceles BOD que sea isoperímetro á BCD, y
* Pr. 1. que será mayor que BCD *. Por consiguiente el polígono ABODEF será tambien mayor que ABCDEF: luego este último no seria el *máxîmo* entre todos los que tienen igual perímetro, y un mismo número de lados, lo que repugna con lo supuesto: luego debe ser BC = CD. Por la misma razon tendremos CD = DE, DE = BF, &c.: luego todos los lados del polígono *máxîmo* son iguales entre sí.

PROPOSICION III.

TEOREMA.

De todos los triángulos formados con dos lados dados, que formen entre sí un ángulo qualquiera, el máxîmo *es aquel en que los dos lados dados forman un ángulo recto.*

Fig. 174. Sean los dos triángulos BAC y BAD, que tienen el lado AB comun, y el lado AC = AD. Siendo recto el ángulo BAC, digo que el triángulo BAC será mayor que el triángulo BAD, que tiene el ángulo A obtuso ó agudo.

Porque siendo una misma la base AB, los dos triángulos BAC y BAD siguen la razon de sus alturas AC y DE; pero la perpendicular DE es mas corta que la obliqüa AD ó su igual AC: luego el triángulo BAD es menor que BAC.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

De todos los polígonos formados con lados dados ménos el último, que será arbitrario, el máxîmo *debe ser tal que todos sus ángulos estén inscritos en una semicircunferencia, cuyo lado desconocido será el diámetro.*

Sea ABCDEF el mayor polígono formado con los lados dados AB, BC, CD, DE, EF, &c. y un último AF arbitrario. Fig. 175.

Tírense las diagonales AD y DF.

Si no fuese recto el ángulo ADF, podriamos, sin alterar en nada las partes ABCD, DEF, hacer mayor el triángulo ADF, y por consiguiente todo el polígono, haciendo recto al ángulo ADF, segun la proposicion anterior. Pero este polígono es incapaz de incremento, pues hemos supuesto haber llegado á su *máxîmo*: luego el ángulo ADF es yá recto. Lo mismo sucede con los ángulos ABF, ACF, AEF: luego todos los ángulos A, B, C, D, E, F del polígono *máxîmo* estan inscritos en una semicircunferencia, cuyo lado indeterminado AF es el diámetro.

Escolio. Esta proposicion da lugar á una qüestion, y es: si hay muchas maneras de formar un polígono con lados dados, y el último incógnito, que será el diámetro de la semicircunferencia en que estan inscritos los demas. Antes de decidir esta qüestion, es preciso observar que si una misma cuerda AB subtende arcos descritos con radios diferentes AC y AD, el ángulo del centro, que descansa sobre esta cuerda, será menor en el círculo, cuyo radio es mayor. Así ACB<ADB, porque el ángulo ADO=ACD+CAD *: luego ACD<ADO, y duplando por ambas partes, tendremos ACB<ADB. Fig. 176. * 19, 1.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

Solo hay un modo de formar el polígono ABCDEF *con lados dados, y uno incógnito, que sea el diámetro de la semicircunferencia en que estan inscritos los demas.*

Porque supongamos que hemos hallado un círculo que satisfaga la qüestion. Si tomamos un círculo mayor,

Fig. 175. las cuerdas AB, BC, CD, &c. corresponderán á ángulos del centro menores. Las sumas de estos ángulos del centro valdrá ménos por consiguiente que dos rectos, y así los extremos de los lados dados no irán á dar á los estremos del diámetro. Si tomarámos un círculo menor, tropezaríamos con el inconveniente contrario: luego el polígono de que tratamos solo puede inscribirse en un círculo.

Escolio. Se puede alterar segun se quiera el órden de los lados AB, BC, CD, &c., y el diámetro del círculo circunscrito permanecerá siempre el mismo, igualmente que la superficie del polígono, porque, sea qual fuere el órden de los arcos AB, BC, &c., basta que su suma valga la semicircunferencia, y el polígono tendrá siempre una misma superficie, pues será igual al semicírculo, ménos los segmentos AB, BC, &c., cuya suma es la misma en todos casos.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

De todos los polígonos formados con lados dados, el máxîmo *es el que se puede inscribir en un círculo.*

Fig. 177. Sea ABCDEFG el polígono inscrito, y *abcdefg* el que no se puede inscribir, formado con lados iguales, de modo que sea AB = *ab*, BC = *bc*, &c.: digo que el polígono inscrito es mayor que el otro.

Tírese el diámetro EM, y las líneas AM y MB; sobre *ab* = AB — hágase el triángulo *abm* igual á ABM, y tírese *em*.

Segun la proposicion IV, el polígono EFGAM es mayor que *efgam*, á no ser que tambien este último pudiera inscribirse en una semicircunferencia, cuyo diámetro fuese el lado *em*, y en este caso los dos polígonos serian iguales por la proposicion IV. Por la misma razon el polígono EDCBM es mayor que *edcbm.*, exceptuando este caso en que serian iguales. Luego el polígono entero EFGAMBCDE es mayor que *efgambcde*, á ménos que no sean totalmente iguales; pero no lo son, pues el uno está inscrito en el círculo, y el otro hemos supuesto que no se puede inscribir: luego el polígono inscrito es mayor. Quitando de ambas partes los triángulos iguales ABM, *abm*, quedará el polígono inscrito ABCDEFG mayor que el ininscribible *abcdefg*.

Escolio. Se demostrará, como en la proposicion V, que solo puede haber un círculo y por consiguiente solo un polígono máxîmo que satisfaga la qüestion; y este polígono seria todavia de una misma superficie, aunque se mudára como se quisiera el órden de sus lados.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

El polígono regular es un máxîmo *entre todos los polígonos insoperimetros y de un mismo número de lados.*

Porque segun el teorema II, el polígono *máxîmo* tiene todos sus lados iguales; y, segun el teorema anterior, es ininscribible en el círculo: luego este polígono es regular.

PROPOSICION VIII.

LEMA.

Dos ángulos del centro, que tienen por medida dos arcos distintos, siguen la razon de los arcos comprehendidos divididos por sus radios.

Así el ángulo C es al ángulo O como la razon $\frac{AB}{AC}$ es á la razon $\frac{DE}{DO}$. Fig. 178.

Con un radio OF igual á AC descríbase el arco FG comprehendido entre los lados OD y OE prolongados.

...

Por ser iguales los radios AC, OF, tendremos desde

* 17, 2. luego C: O :: AB :: FG *, ó :: $\frac{AB}{AC}$: $\frac{FG}{FO}$. Pero por los ar-
* pr. 11. cos semejantes FG y DE sacamos * FG : DE :: FO : DO; luego la razon $\frac{FG}{FO}$ es igual á la razon $\frac{DE}{DO}$, y tenemos por consiguiente C : O :: $\frac{AB}{AC}$: $\frac{DE}{DO}$.

PROPOSICION IX.

TEOREMA.

De dos polígonos regulares insoperímetros, aquel es mayor que tiene mayor número de lados.

Fig. 179. Sea DE la mitad del lado de uno de los polígonos, O su centro, OE su apotema. Sea AB el mediolado del otro polígono, C su centro, y CB su apotema. Suponemos los centros O y C situados á una distancia qualquiera OC, y los apotemas OE y CB en la direccion OC; así DOE y ACB serán los semiángulos del centro de los polígonos, y somo estos ángulos no son iguales, las líneas CA y OD prolongadas se encontrarán en un punto F.

Desde este punto F báxese á OC la perpendicular FG; desde los puntos O y C, como centros, descríbanse los arcos GI y GH, terminados en los lados OF, CF.

Esto sentado, tendremos, segun el lema anterior O: C :: $\frac{GI}{OG}$: $\frac{GH}{CG}$; pero DE es al perímetro del primer polígono como el ángulo O es á quatro ángulos rectos, y AB es al perímetro del segundo polígono como el ángulo C es á quatro ángulos rectos: luego, ya que son iguales los perímetros de los polígonos, DE : AB :: O : C, ó DE: AB :: $\frac{GI}{OG}$: $\frac{GH}{CG}$. Multiplicando los antecedentes por OG y los consecuentes por CG*, tendremos $DE \times OG : AB \times CG :: GI : GH$. Pero los triángulos semejantes ODE, OFG, dan $OE : OG :: DE : FG$, de donde resulta $DE \times OG = OE \times FG$. Tendrémos tambien $AB \times CG = CB \times FG$: luego $OE \times FG : CB \times FG :: GI : GH$, ó $OE : CB :: GI : GH$. Luego si hacemos ver que el arco GI es mayor que el arco GH, deducirémos que el apotema OF es mayor que CB.

Al otro lado de CF hágase la figura CKx totalmente igual á la figura CGx, de modo que tengamos $CK = CG$, el ángulo $HCK = HCG$, y el arco $Kx = xG$; la curba KxG cubrirá al arco KHG, y será mayor que él*. * pr. 9.
Luego Gx, mitad de la curva, es mayor que GH, mitad del arco: luego, con mayor razon, será GI mayor que GH.

De aquí resulta que el apotema OE es mayor que CB; pero ya que los dos polígonos tienen un mismo perímemetro, son entre sí como sus apotemas*: luego el polígono que tiene por medio-lado DE es mayor que el que tiene por medio-lado AB; el primero tiene mas lados por ser menor su ángulo del centro: luego de dos polígonos regulares isoperímetros, aquel es mayor que tiene mas lados. * pr. 7.

PROPOSICION X.

TEOREMA.

El círculo es mayor que qualquiera polígono isoperímetro.

Ya queda probado que de todos los polígonos isoperímetros, y de un mismo número de lados, el polígono regular es el mayor, y así ahora solo tratamos de comparar el círculo á un polígono regular qualquiera isoperímetro. Sea AI el medio-lado de este polígono, C su centro. Sea en el círculo isoperímetro el ángulo $DOE = ACI$, y por consiguiente el arco DE igual al medio-lado AI. El polígono P es al círculo C como el triángulo ACI es al sector ODE; así tendrémos $P : C :: \frac{1}{2}AI \times CI : \frac{1}{2}DE \times OE :: CI : OE$. Tírese al punto E la tangente EG, que encuentre en G á la prolongacion de OD; los triángulos semejantes ACI, GOE darán la proporcion $CI : OE :: AI$ ó $DE : GE$; luego $P : C :: DE : GE$, ó como $DE \times \frac{1}{2}OE$, que es la medida del sector DOE, es á $GE \times \frac{1}{2}OE$, que es la medida del triángulo GOE; pero el sector es menor que el triángulo: luego P es menor que C, y por lo mismo el círculo es mayor que qualquiera polígono isoperímetro.

LIBRO V.

LOS PLANOS Y LOS ÁNGULOS SÓLIDOS.

DEFINICIONES.

I. Una línea recta es *perpendicular á un plano*, quando es perpendicular á todas las rectas que pasan por su *pie* en el plano*. Recíprocamente, el plano es perpendicular á la línea. * pr. 4.

El *pie* de la perpendicular es el punto en que esta línea encuentra al plano.

II. Una línea es *paralela á un plano*, quando no puede encontrarle por mucho que se prolonguen ambos. Recíprocamente, el plano es paralelo á la línea.

III. Dos *planos* son *paralelos* entre sí, quando por mucho que uno y otro se prolonguen, jamas pueden encontrarse.

IV. Se demostrará * que la interseccion comun de dos planos que se encuentran es una línea recta; y sentado esto, *el ángulo ó la inclinacion mutua de dos planos* es la mayor ó menor cantidad que pueden estar separados uno de otro; esta cantidad se mide * por el ángulo que forman entre sí las dos perpendiculares tiradas en cada plano á un mismo punto de la comun interseccion. * pr. 3. * pr. 17.

Este ángulo puede ser agudo, recto ú obtuso.

V. Si es recto, los dos *planos* son *perpendiculares* entre sí.

VI. *Ángulo sólido* es el espacio angular comprehendido entre muchos planos que concurren en un mismo punto.

Así el ángulo sólido S está formado por la reunion de los planos ASB, BSC, CSD, DSA.

Se necesitan tres planos á lo ménos para formar un ángulo sólido.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Una línea recta no puede estar parte en un plano, y parte en otro.

Porque, segun la definicion del plano, si una recta tiene dos puntos comunes en un plano, está toda entera en él.

Escolio. Para conocer si una superficie es plana se aplicará sobre ella una línea recta en diversos sentidos, y se verá si toca á la superficie en toda su extension.

PROPOSICION II.

TEOREMA.

Dos líneas rectas que se cortan, estan en un mismo plano, y determinan su posicion.

Fg. 181. Sean AB, AC dos líneas rectas que se cortan en A; podemos imaginar un plano en que se halle la línea recta AB; si luego hacemos girar este plano al rededor de AB, hasta que pase por el punto C, entónces la línea AC, que tiene dos de sus puntos A, C en este plano, estará toda entera en él: luego la posicion de este plano queda determinada con solo la condicion de que esten en él las dos rectas AB, AC.

Corolario I. Luego un triángulo ABC, ó tres puntos A, B, C, que no esten en una misma línea recta, determinan la posicion de un plano.

Fig. 182. *Corolario II.* Luego tambien dos paralelas AB, CD determinan la posicion de un plano; porque, si tiramos

la secante EF, el plano de las dos rectas AE, EF será el de las paralelas AB, CD.

PROPOSICION III.

TEOREMA.

Si dos planos se cortan, su comun seccion será una línea recta.

Porque si en los puntos comunes á ambos planos hubiese tres que no estuviesen en línea recta, estos planos, pasando cada uno por estos tres puntos, formarian un solo y mismo plano *, lo que repugna contra lo supuesto. * Pr. 2.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

Si una línea recta AP *es perpendicular á otras dos* PB, PC, *que se cruzan al pie de ella en el plano* MN, *será perpendicular á una recta qualquiera* PQ *tirada por su pie en el mismo plano, y así será perpendicular al plano* MN. Fig. 183.

Por un punto Q, tomado á arbitrio sobre PQ, tírese la recta BC en él ángulo BPC, de modo que BQ = QC*, y tírense AB, AQ, AC. * Prob. 5. Lib. 3.

Estando dividida la base BC en dos partes iguales en el punto Q, el triángulo BPC dará * * 14, 3.

$$(BP)^2 + (PC)^2 = 2(PQ)^2 + 2(QC)^2$$

El triángulo ABC dará tambien

$$(AC)^2 + (AB)^2 + 2(AQ)^2 + 2(QC)^2$$

Restando la primera equacion de la segunda, y observando que los triángulos APC, APB, rectángulos ambos en P, dan $(AC)^2 - (PC)^2 = (AP)^2$, y $(AB)^2 - (PB)^2 = (AP)^2$, tendrémos.

$$(AP)^2 + (AP)^2 = 2(AQ)^2 - 2(PQ)^2$$

Luego, tomando las mitades de ambas partes, tene-

mos $(AP)^2 = (AQ)^2 - (PQ)^2$, ó $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2$:
* 13, 3. luego el triángulo APQ es rectángulo en P*, y AP es perpendicular á PQ.

Escolio. Aquí vemos no solo que es posible que una línea recta sea perpendicular á todos las que pasan por su pie en un plano, sino que esto se verifica siempre que esta línea es perpendicular á dos rectas tiradas en el plano, en lo qual queda demostrada ya la exâctitud de la definicion I.

Corolario I. La perpendicular AP es mas corta que una obliqüa qualquiera AQ: luego mide la verdadera distancia del punto A al plano PQ.

Corolario II. Por un punto P, dado en un plano, solo se le puede levantar una perpendicular. Porque si pudiésemos levantar dos perpendiculares en el mismo punto P, llevando en la direccion de estas dos perpendiculares un plano, cuya interseccion con el plano MN sea PQ, entónces dichas dos perpendiculares serian perpendiculares á la línea PQ, en el mismo punto y en el mismo plano, lo que es imposible.

Es igualmente imposible baxar dos perpendiculares á un plano desde un punto dado fuera de él. Porque, si suponemos que son AP y AQ estas dos perpendiculares, el triángulo QPA tendria dos ángulos rectos APQ, AQP, lo qual es un absurdo.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

Las obliqüas equidistantes de la perpendicular son iguales; y, de dos obliqüas que no equidisten de la perpendicular, aquella es mas larga que dista mas.

Fig. 184. Porque siendo rectos los ángulos APB, APC, APD si suponemos las distancias PB, PC, PD iguales entre sí, los triángulos APB, APC, APD tendran un ángulo igual comprehendido entre lados iguales: luego serán

iguales, y tambien las hipotenusas ó las obliqüas AB, AC, AD serán iguales entre sí. Del mismo modo, si la distancia PE es mayor que PD, ó su igual PB, claro está que la obliqüa AE será mayor que AB, ó su igual AD.

Corolario. Todas las obliqüas iguales AB, AC, AD, &c. van á parar á la circunferencia BCD, trazada desde el pie P de la perpendicular como centro: luego, dado un punto A fuera de un plano, si queremos hallar en este plano el punto P donde caeria la perpendicular baxada desde A, debemos señalar en el plano tres puntos B, C, D, equidistantes del punto A, y buscar luego el centro del círculo que pasa por ellos, y este centro será el punto P que buscamos.

Escolio. El ángulo ABP es lo que llamamos la *inclinacion de la obliqüa* AB *sobre el plano* MN; vemos que esta inclinacion es igual para todas las obliqüas AB, AC, AD, &c., que equidistan de la perpendicular; porque todos los triángulos ABP, ACP, ADP, &c. son iguales entre sí.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

Sea AP *una perpendicular al plano* MN, *y* BC *una línea situada en él; si desde el pie* P *de la perpendicular tirámos* PD *perpendicular á* BC, *y luego* AD: *digo que tambien* AD *será perpendicular á* BC. Fig. 185.

Tómese DB = DC, y tírense PB, AB, PC, AC.

Por ser DB = DC, la obliqüa PB = PC; y respecto á la perpendicular AP, ya que PB = PC, la obliqüa AB es igual AC*: luego la línea AD tiene dos de sus puntos A y D equidistantes de los extremos B y C: luego AD es perpendicular en el medio de BC.

* pr. 5.

Corolario. Vemos al mismo tiempo que BC es perpendicular al plano APD, pues lo es á un tiempo á las dos rectas AD, PD.

Escolio. Las dos líneas AE, BC presentan el exemplo de dos líneas que no se encuentran, porque no estan en un mismo plano. La mas corta distancia entre estas líneas es la recta PD, que es á un tiempo perpendicular á la línea AP y á la BC. La distancia PD es la menor que hay entre estas dos líneas, porque si tiramos una recta por otros dos puntos qualesquiera A, B, tendrémos AB>AD, AD>PD: luego, con mayor razon, AB>PD.

Aunque las dos rectas AE, CB no estan situadas en un mismo plano, las consideramos no obstante como que forman entre sí un ángulo recto; porque AE y la paralela tirada por uno de sus puntos á la línea BC formarian entre sí un ángulo recto. Del mismo modo, las líneas AB y PD, que representan dos rectas qualesquiera, no situadas en un mismo plano, nos imaginamos que forman entre sí el mismo ángulo que formaria con AB la paralela á PD, tirada por uno de los puntos de AB.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

Fig. I. 86. *Si la línea* AP *es perpendicular al plano* MN, *toda línea* DE, *paralela á* AP, *será perpendicular al mismo plano.*

Llévese en la direccion de las paralelas AP y DE un plano, cuya interseccion con el plano MN será PD; en el plano MN tírese la BC perpendicular á PD, y tírese tambien AD.

Segun el corolario del teorema anterior, BC es perpendicular al plano APDE: luego el ángulo BDE es recto. Pero el ángulo EDP es recto tambien, por ser AP perpendicular á PD, y DE paralela á AP: luego la línea DE es perpendicular á las dos rectas DP, DB: luego es perpendicular á su plano MN.

Corolario I. Recíprocamente, si las rectas AP y DE son perpendiculares al mismo plano MN, serán paralelas. Porque si no lo fuesen tírese por el pnnto D una paralela á AP, que será perpendicular al plano MN: luego podriamos desde un mismo punto D de un plano levantarle dos perpendiculares, lo que es imposible.* * pr. 4.

Corolario II. Dos líneas A y B, paralelas á una tercera C, son paralelas entre sí. Porque imaginemos un plano perpendicular á la línea C, en cuyo caso las rectas A y B, paralelas á esta perpendicular, serán perpendiculares al mismo plano: luego, segun el corolario anterior, serán paralelas entre sí. Hemos de entender que las tres líneas no estan en un mismo plano, porque á no ser así, la proposicion nos seria ya conocida.* * 26, 1.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

Si la línea AB *es paralela á una recta* CD *tirada en el plano* MN, *será paralela á este plano.* Fig. 187.

Porque si la línea AB, que está en el plano ABCD, encontrase al plano MN, esto solo podria verificarse en algun punto de la línea CD, comun seccion de los dos planos; pero AB no puede encontar á CD, por ser ambas paralelas una á otra: luego tampoco encontrará al plano MN, y será paralela á él.* * Def. 2.

PROPOSICION IX.

TEOREMA.

Dos planos MN *y* PQ, *perpendiculares á una misma recta* AB, *son paralelos entre sí.* Fig. 188.

Porque, suponiendo que se encontrasen, sea O uno de sus puntos comunes, y tírense OA, OB.

La línea AB, perpendicular al plano MN, es perpendicular á la recta OA tirada al pie de ella en este plano. Por la misma razon AB es perpendicular á BO: luego OA y OB serian dos perpendiculares baxadas á una misma recta desde un mismo punto O, lo que es imposible: luego los planos MN, PQ no pueden encontrarse, y por consiguiente son paralelos.

PROPOSICION X.

TEOREMA.

Fig. 189. *Las intersecciones* EF, GH *de dos planos paralelos* MN, PQ, *cortados por un tercero* FG, *son paralelas.*

Porque si las líneas EF, GH, situadas en un mismo plano, no son paralelos, se encontrarian si las prolongásemos: luego los planos MN, PQ, en que estan, se encontrarian tambien: luego no serian paralelos.

PROPOSICION XI.

TEOREMA.

Fig. 188. *La línea* AB, *perpendicular al plano* MN, *es perpendicular al plano* PQ *paralelo á* MN.

Habiendo tirado arbitrariamente la línea BC en el plano PQ, llevese en la direccion de AB y BC un plano ABC, cuya interseccion con el plano MN sea AD, * pr. 10. y la qual será paralela á BC*. Pero la línea AB, perpendicular al plano MN, es perpendicular á la recta AD: luego tambien seria perpendicular á su paralela BC; y por ser la línea AB perpendicular á qualquiera línea BC tirada al pie de ella en el plano PQ, se sigue que es perpendicular á dicho plano.

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

Las paralelas EG, FH, *comprehendidas entre dos planos* MN, PQ *paralelos, son iguales.* Fig. 189.

Por las paralelas EG, FH hágase pasar el plano EGHF, que encontrará á los planos paralelos en la direccion EF y GH. Las intersecciones EF y GH son paralelas entre sí, del mismo modo que EG y FH: luego la figura EGHF es un paralelógramo: luego EG = FH.

Corolario. Síguese de aquí que *dos planos paralelos equidistan por todas partes*; porque si EG, y FH son perpendiculares á los dos planos MN, PQ, serán paralelas entre sí*: luego son iguales. * pr. 7.

PROPOSICION XIII.

TEOREMA.

Si dos ángulos CAE, DBF, *situados en distintos planos, tienen sus lados paralelos y en una misma direccion, estos ángulos serán iguales y sus planos serán paralelos.* Fig. 190.

Tómese AC = BD, AE = BF, y tírense CE, DF, AB, CD, EF.

Por ser AC paralela á BD, la figura ABDC es un paralelógramo*: luego CD es igual y paralela á AB. * 31, 1. Por una razon semejante, EF es igual y paralela á AB: luego tambien CD es igual y paralela á EF, y la figura CEFD es un paralelógramo: luego el lado CE es igual y paralelo á DF, y por consiguiente los triángulos CAE, y DBF son equilateros entre sí: luego el angulo CAE = DBF.

En segundo lugar, digo que el plano ACE es paralelo al plano DBF; porque supongamos un plano paralelo á BDF, que pase por el punto A, el qual encuentre á las líneas CD y EF en otros puntos que no sean C y E, por exemplo, en G y H. En este caso, segun la proposicion XII, las tres líneas AB, GD, FH serán iguales; pero las tres AB, CD, EF lo son ya: luego tendremos CD = GD, y FH = EF, lo qual es un absurdo: luego el plano ACE es paralelo á BDF.

Corolario. Si dos planos paralelos MN, PQ estan cortados por otros dos CABD, EABF, los ángulos CAE, DBF, formados por las intersecciones de los planos paralelos, serán iguales; porque la interseccion
* Pr. 10. AC es paralela á BD *, y AE lo es á BF: luego el ángulo CAE = DBF.

PROPOSICION XIV.

TEOREMA.

Fig. 190. *Si tres rectas* AB, CD, EF, *situadas en distintos planos, son iguales, y paralelas, los triángulos* ACE, BDF, *formados de ambas partes por los extremos de estas rectas, serán iguales, y sus planos paralelos.*

Porque una vez que AB es igual y paralela á CD, la figura ABDC es un paralelógramo: luego el lado AC es igual y paralelo á BD. Por una razon semejante, los lados AE, BF son iguales y paralelos, así como CE, DF: luego los dos triángulos CAE y BDF son iguales. Se probará tambien, como en la proposicion anterior, que sus planos son paralelos.

PROPOSICION XV.

TEOREMA.

Fig. 191. *Dos rectas, comprehendidas entre planos paralelos, estan cortadas en partes proporcionales.*

Supongamos que la línea AB encuentra á los planos paralelos MN, PQ, RS en A, E, B, y que la línea CD encuentra á estos mismos planos en C, F, D: digo que tendremos AE : EB :: CF : FD.

Tírese AD, que encuentre al plano PQ en G, y tírense tambien las AC, EG, GF, BD.

Las intersecciones EG, BD de los planos paralelos PQ, RS con el plano ABD, son paralelas*: luego AE : EB :: AG : GF. Del mismo modo, las intersecciones AC, GF, siendo paralelas, nos dan AG : GD :: CF : FD: luego, quitando la razon comun AG : GD: tendrémos AE : EB :: CF : FD. * Pr. 10.

PROPOSICION XVI.

TEOREMA.

Sea ABCD *un quadrilátero situado ó no situado en un mismo plano, si cortamos proporcionalmente los lados opuestos con dos rectas* EF, GH, *de modo que sea* AE: EB :: DF : FC, *y* BG : GC :: AH : HD; *digo que las rectas* EF *y* GH *se cortarán en un punto* M, *y tendremos* HM : MG :: AE : EB, *y* EM : MF :: AH : HD. Fig. 192.

Llévese en la direccion AD un plano qualquiera A*b*H*c*D, que no pase en la direccion GH. Por los puntos E, B, C, F, tírense á GH las paralelas E*e*, B*b*, C*c*, F*f*, que encuentren á este plano en *e*, *b*, *c*, *f*. Las paralelas B*b*, GH, C*c* nos dan* *b*B : H*c* :: BG : GC :: AH: HD; luego los triángulos AH*b*, *c*HD son semejantes*. Tendrémos luego A*e* : *eb* :: AE : EB, y D*f* : *fc* :: DF: FC; luego A*e* : *eb* :: D*f* : *fc*, ó *componendo*, A*e* : D*f* :: A*b* : D*c*. Pero los triángulos semejantes AH*b*, *c*HD dan A*b* : D*c* :: AH : HD; luego A*e* : D*f* :: AH : HD. Ademas los triángulos AH*b*, *c*HD, siendo semejantes, el ángulo HA*e* = HD*f*; luego los triángulos HA*e*, DH*f* son semejantes*, y el ángulo AH*e* = DH*f*. Dedúcese desde luego que *e*H*f* es una línea recta, y que así las tres paralelas E*e*, GH, F*f* estan en un mismo plano, en el * 15. 3. * 20. 3. * 20. 3.

qual estarán tambien las dos rectas EF, GH: luego *estas deben cortarse en un punto* M. Las paralelas E*e*, MH, F*f* nos darán EM : MF :: *e*H : H*f* :: AH : HD. Por una construccion parecida, haciendo pasar un plano por AB, demostrariamos que HM : MG :: AE : EB.

PROPOSICION XVII.

TEOREMA.

Fig. 193. *El ángulo comprehendido entre los dos planos* MAN, MAP *puede medirse, segun la definicion, por el ángulo* NAP, *que forman entre sí las dos perpendiculares* AN, AP, *tiradas en cada uno de estos planos á la comun seccion* AM.

Para demostrar la exâctitud de esta medida, es preciso probar, 1.° que es constante, y que seria la misma, sea qual fuese el punto de la comun seccion al qual se tirasen las dos perpendiculares.

En efecto, si tomamos otro punto M, y tiramos MC en el plano MN, y MB en el plano MP, perpendiculares á la comun seccion AM, por ser MB y AP perpendiculares á una misma línea AM, serán paralelas entre sí. Por la misma razon MC es paralela á AN:
* Pr. 13. luego el ángulo BMC = PAN*: luego es indiferente tirar las perpendiculares al punto M ó al punto A, porque el ángulo comprehendido será siempre el mismo.

2.° Es menester probar, que si el ángulo de dos planos aumenta ó disminuye en una cierta razon, el ángulo PAN aumentará ó disminuirá en la misma razon.

En el plano PAN descríbase desde el centro A, y con un radio arbitrario el arco NDP; desde el centro M, y con un radio igual descríbase el arco CEB; tírese AD arbitrariamente.

Siendo perpendiculares á una misma recta MA los
* Pr. 9. dos planos PAN, BMC, serán paralelos*: luego las intersecciones AD, ME de estos dos planos con un terce-

ro AMD serán paralelas: luego el ángulo BME será igual á PAD.* * Pr. 13.

Demos por un momento el nombre de *esquina* al ángulo formado por dos planos MP, MN. Esto sentado, si el ángulo DAP fuese igual á DAN, claro está que la esquina DAMP seria igual á la esquina DAMN; porque la base PAD se ajustaria perfectamente con su igual DAN, y la altura AM seria siempre la misma: luego las dos esquinas coincidirian una con otra. Vemos tambien que si el ángulo DAP cupiese un cierto número cabal de veces en el ángulo PAN, la esquina DAMP cabria igual número de veces en la esquina PAMN. Ademas de la razon en números enteros á una razon qualquiera, la conclusion es legítima, y queda demostrada en un caso de todo punto semejante*: luego sea la que * 17. 2. se fuere la razon del ángulo DAP al ángulo PAN, la esquina DAMP conservará esta misma razon con la esquina PAMN: luego el ángulo NAP puede tomarse por medida de la esquina PAMN, ó del ángulo que forman entre sí los dos planos MAP, MAN.

Escolio. Quando dos planos se cortan mútuamente, los ángulos opuestos al vértice son iguales, y los ángulos adyacentes valen juntos dos rectos; luego si un plano es perpendicular á otro, este lo es tambien al primero. Del mismo modo, quando dos planos están cortados por otro tercero, se verifican las mismas igualdades de ángulos, y las mismas propiedades que quando dos líneas paralelas estan cortadas por una tercera.

PROPOSICION XVIII.

TEOREMA.

Siendo la línea AP *perpendicular al plano* MN, *qualquiera plano* APB, *en la direccion* AP, *será perpendicular al plano* MN. Fig. 194.

Sea AB la interseccion de los planos AB, MN.

...

Si en el plano MN tiramos á BP la perpendicular DE, siendo la línea AP perpendicular al plano MN, será perpendicular á cada una de las dos rectas BC, DE. Pero el ángulo APD, formado en la comun seccion BP por las dos perpendiculares PA, PD, es la medida del ángulo que forman los dos planos AB, MN: luego, una vez que este ángulo es recto, los dos planos son perpendiculares entre sí. *

* Def. 5.

Escolio. Quando tres rectas, como AP, BP, DP, son perpendiculares entre sí, cada una de ellas es perpendicular al plano de las otras dos, y los tres planos son perpendiculares entre sí.

PROPOSICION XIX.

TEOREMA.

Fig. 149. *Si el plano* AB *es perpendicular al plano* MN, *y tiramos en el plano* AB *la línea* PA *perpendicular á la comun seccion* PB, *digo que* PA *será perpendicular al plano* MN.

Porque si en el plano MN tiramos PD perpendicular á PB, el ángulo APD será recto, por ser los planos perpendiculares entre sí: luego la línea AP es perpendicular á las dos rectas PB y PD, y lo es tambien á su plano MN.

Corolario. Si el plano AB es perpendicular al plano MN, y á este último le levantamos una perpendicular en un punto P de la comun seccion; digo que esta perpendicular estará en el plano AB. Porque si no estuviese, podriamos tirar en el plano AB una perpendicular AP á la comun seccion BP, la qual seria al mismo tiempo perpendicular al plano MN: luego en el punto P habria dos perpendiculares al plano MN, lo que es imposible. *

* Pr. 4.

PROPOSICION XX.

TEOREMA.

Si dos planos AB, AD *son perpendiculares á un tercero* MN, *su comun seccion* AP *tambien será perpendicular á dicho plano.* Fig. 149.

Porque si en el punto P levantamos una perpendicular al plano MN, esta perpendicular debe hallarse á un tiempo en los dos planos AB y AD*: luego es su comun seccion AP. * Pr. 19.

PROPOSICION XXI.

TEOREMA.

Si un ángulo sólido está formado por tres ángulos planos, la suma de dos qualesquiera de estos ángulos será mayor que el tercero.

Solo se puede demostrar la proposicion, quando el ángulo plano, con el qual comparamos la suma de los otros dos, es mayor que cada uno de estos. Sea pues S el ángulo sólido formado por tres ángulos planos ASB, ASC, BSC, y supongamos que el ángulo ASB sea el mayor de los tres; digo que tendremos ASB < ASC + BSC. Fig. 195.

En el plano ASB hágase el ángulo BSD = BSC, tírese arbitrariamente la recta ADB; y habiendo tomado SC = SD, tírense AC y BC.

Los dos lados BS, SD son respectivamente iguales á los otros dos BS, SC; el ángulo BSD = BSC: luego los triángulos BSD y BSC son iguales, y por consiguiente BD = BC. Pero tenemos AB < AC + BC; quitando de una parte BD, y de la otra su igual BC, quedará AD<AC. Los dos lados AS, SD son iguales á los otros dos AS, SC, y el tercero AD es menor que el tercero AC: luego * el * 10, 1.

ángulo ASD < ASC. Añadiendo BSD = BSC, tendremos ASD + BSD ó ASB < ASC + BSC.

PROPOSICION XXII.

TEOREMA.

La suma de los ángulos planos que forman un ángulo sólido es siempre menor que quatro ángulos rectos.

Fig. 196. Córtese el ángulo sólido S con un plano qualquiera ABCDE; desde el punto O, tomado en este plano, tírense á todos los ángulos las líneas OA, OB, OC, OD, OE,

La suma de los ángulos de los triángulos ASB, BSC, &c., formados al rededor del vértice S, equivale á la suma de un número igual de triángulos AOB, BOC, &c. formados al rededor del vértice O. Pero en el punto B los ángulos ABO, OBC valen juntos el ángulo ABC menor que la suma de los ángulos ABS, SBC*. (* Pr. 21.) Del mismo modo, en el punto C tenemos BCO + OCD < BCS + SCD, y así sucesivamente en todos los ángulos del polígono ABCDE. Sácase de aquí que en los triángulos cuyo vértice es O, la suma de los ángulos de la base es menor que la de sus correspondientes en los triángulos cuyo vértice es S: luego, por compensacion, la suma de los ángulos formados al rededor del punto O es mayor que la de los formados al rededor del punto S. Mas la suma de los primeros, esto es, de los formados al rededor del punto O, vale quatro ángulos rectos*: (* 5. 1.) luego la suma de los ángulos planos que forman el ángulo sólido S es menor que quatro ángulos rectos.

Escolio. Esta demostracion supone que el ángulo sólido es *convexô*, ó que el plano de una cara prolongado jamas puede cortar al ángulo sólido; pues á no ser así, la suma de los ángulos planos seria indeterminada, y podria tener un valor qualquiera.

PROPOSICION XXIII.

TEOREMA.

Si dos ángulos sólidos se componen de tres ángulos planos respectivamente iguales, los planos en que están los ángulos iguales, estarán igualmente inclinados entre sí.

Sea el ángulo ASC = DTF, el ángulo ASB = DTE, y el ángulo BSC = ETF; digo que los dos planos ASC, ASB tendrán entre sí la misma inclinacion que los planos DTF, DTE. Fig. 197.

Habiendo tomado SB arbitrariamente, tírese BO perpendicular al plano ASC; desde el punto O, en que esta perpendicular encuentra al plano, tírense á SA, SC las perpendiculares OA, OC; tírense tambien AB, BC. Tómese luego TE = SB, tírese EP perpendicular al plano DTF; desde el punto P tírense á TD y TF las perpendiculares PD y PF; finalmente, tírense DE, EF.

El triángulo SAB es rectángulo en A, y el triángulo TDE en D*; y por ser el ángulo ASB = DTE, tenemos tambien SBA = TED. Por otra parte SB = TE: luego el triángulo SAB es igual al triángulo TDE, y por el mismo SA = TD, y AB = DE. Del mismo modo se demostrará que SC = TF, y BC = EF. Esto sentado, el quadrilátero SAOC es igual al quadrilatero TDPF; porque sobreponiendo el ángulo ASC á su igual DTF, por ser SA = TD y SC = TF, el punto A caerá en D y el punto C en F. Al mismo tiempo, AO perpendicular á SA caerá sobre DP perpendicular á TD, y del mismo modo OC sobre PF: luego el punto O caerá sobre el punto P, y tendremos AO = DP. Pero los triángulos AOB, DPE son rectángulos en O y P, la hipotenusa AB = DE, y el lado AO = DP: luego estos triángulos son iguales*, y el ángulo OAB = PDE. El ángulo OAB es la inclinacion de los dos planos ASB, ASC; el ángulo PDE es la

* Pr. 6.

* 18. 1.

de los dos planos DTE, DTF: luego estas dos inclinaciones son iguales entre sí.

Debemos observar sin embargo que el ángulo A del triángulo rectángulo OAB no es en rigor la inclinacion de los dos planos ASB, ASC, sino quando la perpendicular BO cae, respecto á SA, del mismo lado que SC. Si cayese al otro lado, entónces el ángulo de los planos seria obtuso, y unido al ángulo A del triángulo OAB, valdrian dos rectos. Pero en este caso tambien el ángulo de los planos TDE, TDF seria obtuso, y sumado con el ángulo D del triángulo DPE, valdria dos rectos: luego, como el ángulo A seria siempre igual á D, deduciriamos que la inclinacion de los dos planos ASB, ASC es igual á la de los otros TDE, TDF.

Escolio. Si dos ángulos sólidos se componen de tres ángulos planos respectivamente iguales, y al mismo tiempo los ángulos iguales ú homólogos estan *colocados del mismo modo* en los dos ángulos sólidos, en tal caso estos ángulos serán iguales, y, sobrepuestos uno á otro coincidirán. En efecto, ya hemos visto que el quadrilátero SAOC puede sobreponerse á su igual TDPF; así colocando SA sobre TD, SC cae sobre TF, y el punto O sobre el punto P. Pero, por ser iguales los triángulos AOB, DPE, la perpendicular OB al plano ASC es igual á la perpendicular PE al plano TDF; ademas estas perpendiculares estan en una misma direccion: luego el punto B caerá sobre el punto E, la línea SB sobre TE; y los dos ángulos solos coincidirán enteramente uno con otro.

Sin embargo, esta coincidencia solo se efectua suponiendo que los ángulos planos iguales estan *colocados del mismo modo* en los dos ángulos sólidos; porque si los ángulos planos estuviesen *colocados en un órden inverso*, esto es, si en lugar de seguir las perpendiculares BO, EP una misma direccion respecto á los planos ASC, DTF, estuviesen en direcciones contrarias, entónces sería imposible hacer coincidir los dos ángulos sólidos uno con otro. Seria igualmente cierto, segun lo demostrado en el teorema, que los planos en que estan los ángulos iguales tendrian una misma inclicacion entre sí; de modo que los dos ángulos sólidos serian iguales en todas sus partes constituyentes, pero siendo imposible no obstante el sobreponerlos uno á otro. Este género de igualdad, que no es absoluta ó de superposicion, merece distinguirse con una denominacion particular, y la llamaremos *igualdad por simetría.* Así los dos ángulos sólidos de que tratamos, que estan formados por tres ángulos planos respectivamente iguales, pero colocados en un órden inverso, se llamarán *ángulos iguales por simetría*, ó simplemente *ángulos simétricos.*

Esta misma observacion se aplica á los ángulos sólidos formados por mas de tres ángulos planos. Así un ángulo sólido formado por los ángulos planos A, B, C, D, E, y otro ángulo sólido formado por los mismos ángulos planos en un órden inverso A, E, D, C, B pueden ser tales, que los planos en que estan los ángulos iguales tengan una misma inclinacion entre sí. Estos dos ángulos sólidos, que serian iguales, aunque fuese imposible la superposicion, se llamarán *ángulos iguales por simetría*, ó *ángulos simétricos.*

En las figuras planas no hay en rigor *igualdad por simetría*, y todas las que designásemos con este nombre serian absolutas ó de superposicion; la razon es, porque podemos trastornar una figura plana, y tomar indiferentemente la parte superior por la inferior. No sucede así con los sólidos, donde la tercera dimension puede tomarse en dos sentidos distintos.

PROPOSICION XXIV.

PROBLEMA.

Dados los tres ángulos planos que forman un ángulo sólido, hallar por una construccion plana el ángulo que forman dos de estos planos entre sí.

Fig. 198. Sea S el ángulo solido propuesto, en el qual conocemos los tres ángulos planos ASB, ASC, BSC, se desea saber el ángulo que forman entre sí dos de estos planos, por exemplo, los planos ASB, ASC.

Si imaginamos haber hecho la misma construccion que en el teorema anterior, el ángulo OAB seria el ángulo que buscamos. Se trata pues de hallar el mismo ángulo por una construccion plana ó trazada sobre un plano.

Para esto háganse sobre un plano los ángulos B′SA, ASC, B″SC iguales á los ángulos BSA, ASC, BSC en la figura sólida; tómense B′S y B″S iguales ambos á BS en la figura sólida. Desde los puntos B′ y B″ báxense á SA y SC las perpendiculares B′A y B″C, que se encontrarán en un punto O. Desde el punto A, como centro, y con el radio AB′, descríbase la semicircunferencia B′*b*E; en el punto O levantese á B′E la perpendicular O*b*, que encuentre á la circunferencia en *b*; tírese A*b* y el ángulo EA*b* será la inclinacion que buscamos de los dos planos ASC, ASB en el ángulo sólido.

Todo se reduce á hacer ver que el triángulo AO*b* de la figura plana es igual al triángulo AOB de la figura sólida. Siendo los dos triángulos B′SA, BSA rectángulos en A, los ángulos en S son iguales: luego los ángulos en B y B′ lo son tambien. Pero la hipotenusa SB′ es igual á la hipotenusa SB: luego estos triángulos son iguales, y SA de la figura plana es igual á SA de la figura sólida, y tambien AB′, ó su igual A*b* en la figura plana, es igual á AB en la figura sólida. Del mismo modo se demostrará que SC es igual en ambas partes; de donde se infiere que el quadrilátero SAOC es igual en las dos figuras, y que así AO de la figura plana es igual á AO de la figura sólida: luego en ambas figuras los triángulos rectángulos AO*b* y AOB tienen iguales la hipotenusa y un lado: luego son iguales, y el ángulo EA*b*, hallado por la construccion plana, es igual á la inclinacion de los dos planos SAB, SAC en el ángulo sólido.

Quando el punto O cae entre A y B′ en la figura plana, el ángulo EAb es obtuso, y mide siempre la verdadera inclinacion de los planos; por esta razon hemos señalado por AEb, y no OAb, la inclinacion que buscábamos, con el fin de que esta misma resolucion convenga á todos los casos.

Escolio. Se preguntará tal vez, si con tres ángulos planos, tomados arbitrariamente, se podrá formar un ángulo sólido.

Es menester desde luego que la suma de los tres ángulos dados sea menor que quatro rectos, pues de lo contrario seria imposible formar el ángulo sólido. Es preciso ademas que despues de haber tomado arbitrariamente dos de los ángulos B′SA, ASC, el tercero CSB″ sea tal, que la perpendicular B″C al lado SC, encuentre al diámetro B′E entre sus extremos B′ y E. Así los límites del tamaño del ángulo CSB″ son los que hacen que la perpendicular B″C vaya á dar á los puntos B′ y E. Desde estos puntos báxense á SC las perpendiculares B′I, EK, que encuentran en I y K á la circunferencia descrita con el radio SB″, y los límites del ángulo CSB″ serán CSI y CSK.

Pero en el triángulo isósceles B′SI, siendo la línea CS prolongada perpendicular á la base B′I, tenemos el ángulo CSI = CSB′ = ASC + ASB′. Y en el triángulo isósceles ESK, siendo la línea SC perpendicular á EK, tenemos el ángulo CSK = CSE. Ademas, por ser iguales los triángulos ASE, ASB′, tenemos el ángulo ASE = ASB′: luego CSE = CSK = ASC — ASB′.

Sácase de aquí que será posible el problema, siempre que el tercer ángulo CSB, sea menor que la suma de los otros dos ASC y ASB′, y mayor que su diferencia: condicion que conviene con el teorema XXI; porque, en virtud de este teorema, es preciso que sea CSB″ < ASC + ASB′, y que ASC < CSB″ + ASB′ ó CSB″ > ASC — ASB′.

PROPOSICION XXV.

PROBLEMA.

Dados dos de los tres ángulos planos que forman un ángulo sólido, y el ángulo que forman sus planos entre sí, hallar el tercer ángulo plano.

Fig. 198. Sean ASC, BSB′ los dos ángulos planos dados, y supongamos por un momento que CSB″ sea el tercer ángulo que buscamos; en este caso, haciendo la misma construccion que en el problema anterior, el ángulo comprehendido entre los planos de los dos primeros seria EA*b*. Pero así como determinamos el ángulo EA*b* por medio de CSB″, dados los otros dos, así tambien podemos determinar CSB″ por medio de EA*b*, y resolverémos de este modo el problema propuesto.

Habiendo tomado SB′ arbitrariamente, báxese á SA la perpendicular indefinida B′E; hágase el ángulo EA*b* igual al de los dos planos dados; desde el punto *b*, en que el lado A*b* encuentra á la circunferencia descrita desde el centro A y con el radio AB′, báxese á AE la perpendicular *b*O, y desde el punto O báxese á SC la perpendicular indefinida OCB″, que se terminará en B″ de modo que SB″ = SB′; el ángulo CSB″ será el tercer ángulo plano pedido.

Porque si formamos un ángulo sólido con los tres ángulos planos B′SA, ASC, CSB″, la inclinacion de los planos en que estan los dos ángulos dados ASB′, ASC, será igual al ángulo dado EA*b*.

Escolio. Si un ángulo sólido es *quadruplo*, ó formado
Fig. 199. por quatro ángulos planos ASB, BSC, CSD, DSA, no basta conocer estos ángulos para determinar las mútuas inclinaciones de sus planos; porque con los mismos ángulos planos se podrian formar una infinidad de ángulos sólidos. Pero si añadimos una condicion, por exemplo, si se da la inclinacion de los dos planos ASB, BSC, en-

tónces ya queda el ángulo sólido enteramente determinado, y podremos hallar la inclinacion de dos qualesquiera de sus planos. En efecto, imagínese un ángulo sólido *triple* formado por los ángulos planos ASB, BSC, ASC; los dos primeros ángulos estan dados, igualmente que la inclinacion de sus planos: luego podremos determinar, segun lo expuesto en el problema que acabamos de resolver, el tercer ángulo ASC. Despues, si consideramos el ángulo sólido triple formado por los ángulos planos ASC, ASD, DSC, conocemos ya estos tres ángulos: así el ángulo sólido queda enteramente determinado. Pero el ángulo sólido quádruplo está formado por la reunion de los dos ángulos sólidos triples de que acabamos de hablar: luego, conocidos ya, y determinados estos ángulos parciales, tambien conoceremos y determinaremos el ángulo total.

El ángulo de los dos planos ASD y DSC se hallaria imediatamente por medio del segundo ángulo sólido parcial. En quanto al ángulo de los dos planos BSC y CSD, seria preciso buscar en el ángulo sólido parcial, el ángulo comprehendido entre los dos planos ASC y DSC, y en el otro el comprehendido entre los dos planos ASC y BSC; la suma de estos dos ángulos seria el ángulo comprehendido entre los planos BSC, DSC.

Del mismo modo veriamos que, para determinar un ángulo sólido quintuplo, es preciso conocer, ademas de los cinco ángulos planos que lo componen, dos de las mútuas inclinaciones de sus planos. Se necesitarian tres en el ángulo sólido séxtuplo, y así de los demas.

LIBRO VI.

LOS POLIEDROS.

DEFINICIONES.

I. Se llama *sólido poliedro*, ó simplemente *poliedro*, todo sólido terminado por planos ó caras planas. (Estos planos estarán terminados forzosamente por líneas rectas.) Se llama con particularidad *tetraedro* al sólido que tiene quatro caras; *exâedro* al de seis; *octaedro* al de ocho; *dodecaedro* al de doce; *icosaedro* al que tiene viente, &c.

El tetraedro es el poliedro mas simple; porque solo se necesitan tres planos para formar un ángulo sólido, y estos tres planos dexan un vacío que, para cerrarse, solo necesita un quarto plano.

II. La interseccion comun de dos caras adyacentes de un poliedro se llama *arista* del poliedro.

III. Se llama *poliedro regular* á aquel, cuyas caras son todas polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos sólidos son iguales entre sí. Estos poliedros son cinco. *Véase el apéndice á los libros VI y VII.*

IV. El *prisma* es un sólido formado por muchos planos paralelógramos, terminados por una y otra parte por dos planos polígonos iguales y paralelos.

Para construir este sólido, sea ABCDE un polígono qualquiera. Si en un plano paralelo á ABC tiramos las líneas FG, GH, HI, &c. iguales y paralelas á los lados AB, BC, CD, &c., quedará formado el polígono FGHIK = ABCDE. Si despues tiramos por los vértices de los ángulos homólogos de los dos planos, las rectas AF, BG, CH, &c., las caras ABGF, BCHG, &c. serán paralelógramos, y el sólido así formado ABCDEFGHIK será un prisma. Fig. 200.

V. Los polígonos iguales y paralelos ABCDE, FGHIK se llaman las *bases del prisma*; los otros planos paralelógramos tomados juntos constituyen lo que llamamos superficie *lateral ó convexâ del prisma.*

VI. La *altura del prisma* es la distancia entre sus dos bases, ó la perpendicular tirada desde un punto de la base superior al plano de la base inferior.

VII. Un *prisma* es *recto* quando los lados AF, BG, &c. son perpendiculares á los planos de las bases, y entónces cada uno de ellos es igual á la altura del prisma. En qualquiera otro caso el prisma es *obliquo*, y la altura es menor que el lado.

VIII. Un *prisma* es *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, *exâgonal*, &c. segun es la base un triángulo, un quadrilátero, un pentágono, un exâgono, &c.

IX. El prisma, cuya base es un paralelógramo, tiene todas sus caras paralelógramas, y se llama *paralelepípedo.* Fig. 206.

El *paralelepido* es rectángulo, quando todas sus caras son rectángulos.

X. Entre los paralelepípedos rectángulos se distingue el *cubo* ó exâedro regular formado por seis quadrados iguales.

XI. La *pirámide* es el sólido formado por muchos planos triángulares, que salen de un mismo punto S, y se terminan en un mismo plano polígono ABCDE. Fig. 201.

El polígono ABCDE se llama la *base* de la pirámide, el punto S es el *vértice*, y el conjunto de los triángulos ASB, BSC, &c. forma la *superficie convexâ ó lateral* de la pirámide.

XII. La *altura* de la pirámide es la perpendicular baxada desde el vértice al plano de la base, prolongado si es necesario.

XIII. La pirámide es *triangular*, *quadrangular*, &c. segun es la base un triángulo, un quadrilátero, &c.

XIV. Una pirámide es *regular* quando la base es un polígono regular, y que al mismo tiempo la perpendicular baxada desde el vértice al plano de la base pasa por su centro, y esta línea se llama entónces el *exe* de la pirámide.

XV. *Diagonal* de un poliedro es la línea tirada por los vértices de dos ángulos sólidos no adyacentes.

XVI. Llamaré *poliedros simétricos* á dos poliedros, que teniendo una base comun, estan construidos semejantemente el uno encima y el otro debaxo del plano de esta base, con la condicion de que los vértices de los ángulos sólidos homólogos esten equidistantes del plano de la base en una misma línea recta perpendicular á dicho plano.

Fig. 202. Por exemplo, si la recta ST es perpendicular al plano ABC, y en el punto O, en que encuentra á este plano, está dividida en dos partes iguales, las pirámides SABC, TABC, que tienen comun la base ABC, serán dos poliedros simétricos.

XVII. Dos *pirámides triángulares* son *semejantes*, quando tienen dos caras respectivamente semejantes, colocadas semejantemente, é igualmente inclinadas entre sí.

Fig. 203. Así, suponiendo los ángulos ABC = DEF, BAC = EDF, ABS = DET, BAS = EDT, si ademas la inclinacion de los planos ABS, ABC es igual á la de sus homólogos DTE, DEF, las pirámides SABC, TDEF serán semejantes.

XVIII. Habiendo formado un triángulo con los vértices de los tres ángulos tomados en una misma cara ó base de un poliedro, podemos imaginar que los vértices de los diferentes ángulos sólidos del poliedro, situados fuera del plano de esta base, son otras tantas pirámides triangulares, cuya base comun es el triángulo señalado, y cada una de estas pirámides determinará la situacion de cada ángulo sólido del poliedro con respecto á la base. Esto sentado:

Dos *poliedros* son *semejantes*, quando siéndolo sus bases, los vértices de los ángulos sólidos homólogos, situados fuera de estas bases, estan determinados por pirámides triangulares iguales cada una á su correspondiente.

XIX. Llamaré *vértices* de un poliedro los puntos situados en los vértices de sus diferentes ángulos sólidos.

N. B. Todos los poliedros que consideramos son poliedros de ángulos salientes, ó poliedros *convexôs*. Damos este nombre á aquellos, cuya superficie no puede estar cortada por una línea recta en mas de dos puntos. En esta especie de poliedros el plano de una cara prolongado no puede cortar al sólido: luego es imposible que el poliedro tenga partes sobre el plano de una cara y partes debaxo, y por consiguiente está todo él entero de un mismo lado de este plano.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Dos poliedros no pueden tener los mismos vértices, y en un mismo número, sin coincidir uno con otro.

Porque supongamos construido uno de los poliedros. Si queremos construir otro que tenga los mismos vértices y en un mismo número, será preciso que los planos de este no pasen todos por los mismos puntos que en el primero, pues de lo contrario no se diferenciarian uno de otro; pero entónces se echa de ver que algunos de los nuevos planos cortarian al primer poliedro; habria ángulos sólidos encima, y otros debaxo de estos planos, lo qual no puede verificarse en un poliedro convexô: luego si dos poliedros tienen los mismos vértices y en igual número, deben coincidir forzosamente uno con otro.

Fig. 204. *Escolio.* Dada la situacion de los puntos A, B', C, K, &c., que deben servir de vértices á un poliedro, es fácil formar el poliedro.

Elíjanse desde luego tres puntos inmediatos D, E, H, tales, que el plano DEH pase, si es posible, por otros nuevos puntos K, C; pero dexando á todos los demas á un mismo lado, ó todos encima del plano, ó todos debaxo; y el plano DEH ó DEHKC, así determinado, será una cara del sólido. Llévese por uno de sus lados EH un plano que haremos girar hasta que encuentre á un nuevo vértice F, ó á muchos al mismo tiempo F, I; y tendremos una segunda cara, que será FEH ó FEHI. Continúese de este modo haciendo pasar planos por los lados hallados hasta que el sólido esté concluido por todas partes; este sólido será el poliedro pedido, porque no hay dos que puedan tener los mismos vértices.

PROPOSICION II.

TEOREMA.

En dos poliedros simétricos las caras homólogas son respectivamente iguales, y la inclinacion de dos caras adyacentes en un sólido es igual á la inclinacion de las caras homólogas en el otro.

Fig. 205. Sea ABCDE la base comun de ambos poliedros; sean M y N los vértices de dos ángulos sólidos qualesquiera de uno de los poliedros, M′ y N′ los vértices homólogos del otro poliedro; será menester, segun la definicion, que las rectas MM′, NN′ sean perpendiculares al plano ABC, y esten divididas en dos partes iguales en los puntos *m* y *n*, en que encuentran á este plano. Esto sentado, digo que la distancia MN es igual á M′N′.

Porque si hacemos girar el trapecio *m*M′N′*n* alrededor de *mn*, hasta que su plano quede sobrepuesto al plano $mMNn$, por ser rectos los ángulos en m y en n, el lado mM' caerá sobre su igual mM, y nN' sobre nN: luego los dos trapecios coincidirán, y tendremos $MN = M'N'$.

Sea P un tercer vértice del poliedro superior, y P' su homólogo en el otro; tendremos tambien $MP = M'P'$, y $NP = N'P'$: luego *el triángulo* MNP, *que une tres vértices qualesquiera del poliedro superior, es igual al triángulo* M'N'P', *que une los tres vértices homólogos del otro poliedro.*

Si entre estos triángulos consideramos únicamente los que estan formados en la superficie de los poliedros, podemos deducir ya que las superficies de los dos poliedros estan compuestas de igual número de triángulos respectivamente iguales.

Digo ahora que si dos triángulos estan en un mismo plano sobre una superficie, y forman una misma cara polígona, los triángulos homólogos estarán en un mismo plano sobre la otra superficie, y formarian una cara polígona igual.

En efecto, sean MPN, NPQ dos triángulos adyacentes que suponemos en un mismo plano, y sean M'P'N', N'P'Q' sus homólogos. Tenemos el ángulo $MNP = M'N'P'$, el ángulo $PNQ = P'N'Q'$; y si tirasemos MQ y M'Q', el triángulo MNQ seria igual á M'N'Q', y por lo mismo el ángulo $MNQ = M'N'Q'$. Pero por estar MPNQ en un solo plano, tenemos el ángulo $MNQ = MNP + PNQ$: luego tambien $M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'$. Pero si los tres planos M'N'P', P'N'Q', M'N'Q' no estuviesen confundidos en uno solo, formarian un ángulo sólido, y tendriamos * el ángulo $M'N'Q'$ *20. 5.
$< M'N'P' + P'N'Q'$: luego no verificándose esta condicion, los dos triángulos M'N'P', P'N'Q' estan en un mismo plano.

Síguese de aquí que cada cara, sea triangular, sea polígona, en un poliedro, corresponde á otra cara igual en el otro, y que así los dos poliedros estan formados

...

por un mismo número de planos respectivamente iguales.

Nos resta que probar, que la inclinacion de dos caras qualesquiera adyacentes en uno de los poliedros es igual á la inclinacion de las dos caras homólogas en el otro.

Sean MPN, NPQ dos triángulos formados sobre la comun arista NP en los planos de las dos caras adyacentes; sean M'P'N', N'P'Q' sus homólogos. ¡Podemos imaginar en N un ángulo sólido formado por los tres ángulos planos MNQ, MNP, PNQ, y en N otro ángulo sólido formado tambien por los tres ángulos planos M'N'Q', M'N'P', P'N'Q'. Pero hemos probado ya que estos ángulos son iguales unos con otros: luego la inclinacion de los dos planos MNP, PNQ es igual á la de
* 22. 5. sus homólogos M'N'P', P'N'Q'. *

Luego en los poliedros simétricos las caras son iguales unas con otras, y los dos planos de dos caras qualesquiera adyacentes de uno de los sólidos tienen entre sí la misma inclinacion que los planos de las dos caras homólogas del otro sólido.

Corolario. Una vez que las partes constituyentes de un sólido, ángulos, lados, inclinaciones de caras son iguales á las partes constituyentes del otro, podemos deducir que *dos poliedros simétricos son iguales, aunque no puedan sobreponerse uno á otro*; porque no hay otra diferencia en los dos sólidos que la de la situacion de las partes, que no es esencial para su magnitud. *Véase la nota VII.*

Escolio. Puede repararse que *los ángulos sólidos de un poliedro son simétricos de los ángulos sólidos del otro poliedro.* Porque si el ángulo sólido N está formado por los planos MNP, PNQ, QNR, &c., su homólogo N' está formado por los planos M'N'P', P'N'Q', Q'N'R', &c. Estos parecen dispuestos en el mismo órden que los demas; pero como los dos ángulos sólidos estan en una situacion inversa uno respecto de otro, síguese que la disposicion real de los planos que forman el ángulo sólido N′ es inversa de la del ángulo homólogo N. Ademas las inclinaciones de los planos consecutivos son iguales en los dos ángulos sólidos: luego estos ángulos sólidos son simétricos uno á otro. *Véase el escolio de la proposicion XXIII, libro V.*

Esta observacion prueba que *un poliedro qualquiera solo puede tener un poliedro simétrico.* Porque si construyesemos sobre otra base un nuevo poliedro simétrico al poliedro dado, los ángulos sólidos de este serán siempre simétricos á los del poliedro dado: luego serian iguales á los del poliedro simétrico, construido sobre la primera base. Por otra parte, las caras homólogas serian siempre iguales: luego los poliedros simétricos, construidos sobre una ú otra base, tendrian las caras y los ángulos sólidos iguales: luego coincidirian por superposicion, y no harian mas que un solo y un mismo poliedro.

PROPOSICION III.

TEOREMA.

Dos prismas son iguales quando tienen un ángulo sólido comprehendido entre planos respectivamente iguales y semejantemente colocados.

Sea la base ABCDE igual á la base *abcde*, el paralelógramo ABGF igual al paralelógramo *abgf*, y el paralelógramo BCHG igual al paralelógramo *bchg*: digo que el prisma ABCI será igual al prisma *abci*. Fig. 200.

Porque, si sobreponemos la base ABCDE á su igual *abcde*, estas dos bases coincidirán; pero los tres ángulos planos que forman el ángulo sólido B son iguales á los otros tres que forman el ángulo sólido *b*, cada uno al suyo, esto es, ABC=*abc*, ABG=*abg*, y GBC=*gbc*; ademas, estos ángulos estan semejantemente colocados: luego los ángulos sólidos B y *b* son iguales, y por consiguiente el lado BG caerá sobre su igual *bg*. Vemos

tambien que por ser iguales los paralelógramos ABGF, *abgf*, el lado GF caerá sobre su igual *gf*, y del mismo modo GH sobre *gh*: luego la base superior FGHIK coincidirá enteramente con su igual *fghik*, y los dos sólidos se confundirán en uno solo, pues tendrán los mismos
* Pr. 1. vértices *. Luego *dos prismas son iguales &c.*

Escolio. Un prisma está determinado del todo, quando se conoce la base ABCDE, y la magnitud y posicion de la arista BG. Porque si por el punto G tiramos GF igual y paralela á AB, GH igual y paralela á BC, y en
* 13. 5. el plano FGH paralelo á ABC *, trazamos el polígono FGHIK igual á ABCDE, claro está que quedarán determinados todos los vértices del prisma. Luego dos prismas construidos con los mismos datos no pueden ser desiguales, lo que confirma la proposicion que acabamos de demostrar.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

En todo paralelepípedo los planos opuestos son iguales y paralelos.

Fig. 206. Segun la definicion de este sólido, las bases ABCD, EFGH son paralelógramos iguales, y sus lados son paralelos. Nos queda, pues, que demostrar, que lo mismo se verifica en las caras laterales opuestas, como AEHD y BFGC. Pero AD es igual y paralela á BC, por ser la figura ABCD un paralelógramo; por una razon semejante, AE es igual y paralela á BF: luego el
* 13. 5. ángulo DAE es igual al ángulo CBF *, y el plano DAE paralelo á CBF: luego tambien el paralelógramo DAEH es igual al paralelógramo CBGF. Del mismo modo se demostrará que los paralelógramos opuestos ABFE, DCGH son iguales y paralelos.

Corolario. Una vez que el paralelepípedo es un sólido formado por seis planos, de los quales los opuestos son iguales y paralelos, síguese que una cara qualquiera y su opuesta pueden tomarse por las bases del paralelepípedo.

Escolio. Dadas tres rectas AB, AE, AD, que no esten situadas en un mismo plano, y formando con ellas ángulos dados, podemos construir sobre dichas tres rectas un paralelepípedo. Para esto debemos hacer pasar por el extremo de cada recta un plano paralelo al de los otros dos; esto es, por el punto B un plano paralelo á DAE, por el punto D un plano paralelo á BAE, y el punto E otro paralelo á BAD. Las intersecciones de estos planos formarian el paralelepípedo que buscamos.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

En todo paralelepípedo los ángulos sólidos opuestos son simétricos uno á otro, y las diagonales tiradas por los vértices de estos ángulos se cortan mútuamente en dos partes iguales.

Comparemos, por exemplo, el ángulo sólido A con su opuesto G. El ángulo EAB, igual á EFB; lo es tambien á HGC, el ángulo DAE = DHE = CGF, y el ángulo DAB = DCB = HGF: luego los tres ángulos planos que forman el ángulo sólido A son iguales á los tres que forman el ángulo sólido G, cada uno al suyo; ademas su disposicion es diferente en uno y en otro: luego 1.° los dos ángulos sólidos A y G son simétricos uno á otro. * Fig. 206.

En segundo lugar, imaginemos dos diagonales qualesquiera EC, AC tiradas por vértices opuestos. Una vez que AE es igual y paralela á CG, la figura AEGC es un paralelógramo: luego las diagonales EC, AG se cortan mútuamente en dos partes iguales. Del mismo modo demostraremos que la diagonal EC y otra DF se * 23. 5.

cortarán tambien en dos partes iguales: luego 2.° las quatro diagonales se cortarán mútuamente en dos partes iguales en un mismo punto, que podemos considerar como centro del paralelepípedo.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

Fig. 207. *El plano* BDHF, *que pasa por dos aristas paralelas opuestas* BF, DH, *divide al paralelepípedo* BG *en dos prismas triangulares* ABDHEF, *y* GHFBCD *simétricos uno á otro.*

Desde luego estos dos sólidos son prismas, porque los triángulos ABD, EFH, por tener sus lados iguales y paralelos, son iguales, y al mismo tiempo las caras laterales ABFE, ADHE, BDHF son paralelógramos: luego el sólido ABDHEF es un prisma, y lo mismo sucede con el sólido GHFBCD. Digo ahora que estos dos prismas son simétricos uno á otro.

Sobre la base ABD hágase el prisma ABDE′F′H′, que sea simétrico al prisma ABDFH. Segun lo que hemos demostrado *, el plano ABF′E′ es igual á ABFE, y el plano ADH′E′ igual á ADHE; pero si comparamos el prisma GHFBCD con el prisma ABDH′E′F′, la base GHF es igual á ABD, el paralelógramo GHDC, que es igual á ABFE, lo es tambien á ABF′E′, y el paralelógramo GFBC, que es igual á ADHE, es tambien igual á ADH′E′: luego los tres planos que forman el ángulo sólido G en el prisma GHFBCD, son iguales á los tres planos que forman el ángulo sólido A en el prisma ABDH′E′F′, y ademas estan colocados semejantemente: luego estos dos prismas son iguales *, y podrán sobreponerse uno á otro. Pero uno de ellos ABDH′E′F′ es simétrico al prisma ABDHEF: luego el otro GHFBCD es tambien simétrico á ABDHEF.

* Pr. 2.
* Pr. 3.

Corolario. Una vez que dos prismas simétricos son iguales en solidez *, síguese que un prisma triangular qualquiera ABDHEF es la mitad del paralelepípedo construido sobre las tres aristas AB, AD, AE, que se terminan en un mismo ángulo A; y seria tambien la mitad del paralelepípedo construido sobre otras tres aristas BA, BD, BF. * Pr. 2. Cor.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

Si dos paralelepípedos AG, AL *tienen una base comun* ABCD, *y sus bases superiores* EFGH, IKLM *estan en un mismo plano y entre unas mismas paralelas* EK, HL, *estos dos paralelepípedos serán equivalentes entre sí.*

Pueden suceder tres casos, dos de los quales estan representados en las figuras 208 y 209, y el tercero sucederia si FG se confundiese con IM; pero la demostracion es la misma para todos, y digo desde luego que el prisma triangular AEIDHM es igual á BFKCGL.

En efecto, una vez que AE es paralela á BF, y HE á GF, el ángulo AEI=GFB. De estos seis ángulos los tres primeros forman el ángulo sólido E, los otros tres forman el ángulo sólido F: luego, ya que los ángulos planos son respectivamente iguales, y estan colocados semejantemente, síguese que los ángulos sólidos E y F son iguales. Ahora, si sobreponemos el prisma AEM al prisma BFL, y tambien la base AEI á la base BFK, estas dos bases coincidirán siendo iguales; y una vez que el ángulo sólido E es igual al ángulo sólido F, el lado EH caerá sobre su igual FG. Basta esto para probar que los dos prismas coincidirán en toda su extension; porque la base AEI, y la arista EH determinan el prisma AEM, como la base BFK, y la arista FG determinan el prisma BFL *: luego estos prismas son iguales. * Pr. 3.

Pero si del sólido AEL quitamos el prisma AEM, quedará el paralelepípedo AIL; y si del mismo sólido AEL restamos el prisma BFL, quedará el paralelepípedo AEG: luego los dos paralelepípedos AIL, AEG son equivalentes entre sí.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

Dos paralelepípedos de una misma base y altura son equivalentes entre sí.

Fig. 210. Sea ABCD la base comun de los dos paralelepípedos AG, AL.

Puesto que tienen una misma altura, sus bases superiores EPGH, IKLM estarán en un mismo plano. Ademas, los lados EF y AB son iguales y paralelos, y sucede lo mismo con IK y AB: luego EF es igual y paralela á LK.

Prolónguense los lados EF, HG, LK, IM hasta que unos y otros formen por sus intersecciones prolongadas el paralelógramo NOPQ.

Claro está que este paralelógramo será igual á cada una de las bases EFGH, IKLM. Pero si imaginamos un tercer paralelepípedo que, con la misma base inferior ABCD, tenga por base superior NOPQ, este tercer paralelepípedo será equivalente al paralelepípedo AG*, pues teniendo una misma base inferior, las bases superiores estan en un mismo plano, y comprehendidas entre las paralelas GQ, FN. Por la misma razon este tercer paralelepípedo será equivalente al paralelepípedo AL: luego los dos paralelepípedos AG y AL, que tienen una misma base y altura, son equivalentes entre sí.

* Pr. 7.

PROPOSICION IX.

TEOREMA.

Todo paralelepípedo puede transformarse en otro paralelepípedo rectángulo equivalente de la misma altura que él, y de una base equivalente.

Sea AG el paralelepípedo propuesto. Fig. 210.

Desde los puntos A, B, C, D tírense al plano de la base las perpendiculares AI, BK, CL, DM, y quedará formado el paralelepípedo AL, equivalente al paralelepípedo AG, y cuyas caras laterales AK, BL, &c., serán rectángulos. Luego si la base ABCD es un rectángulo, AL será el paralelepípedo rectángulo equivalente al propuesto AG. Pero si ABCD no es un rectán- Fig. 211. gulo, tírense AO y BN perpendiculares á CD, y OQ y NP perpendiculares á la base, y tendremos el sólido ABNOIKPQ, que será un paralelepípedo rectángulo. En efecto, por construccion, la base ABON, y su opuesta IKPQ son rectángulos; las caras laterales lo son tambien, por ser las aristas AI, OQ, &c., perpendiculares al plano de la base: luego el sólido AP es un paralelepípedo rectángulo. Pero podemos juzgar que los dos paralelepípedos AP, AL tienen la misma base ABLI, y la misma altura AO: luego son equivalentes: luego el paralelepípedo AG, que habiamos transformado primeramente en otro equivalente AL, se halla transformado de nuevo en un paralelepípedo rectángulo Fig. 210. y 211. equivalente AP, que tiene la misma altura AI, y cuya base ABNO es equivalente á la base ABCD.

PROPOSICION X.

LEMA.

Fig. 200. *Toda seccion* NOPQR, *hecha en un prisma por un plano paralelo á la base* ABCDE, *es igual á dicha base.*

Porque las paralelas AN, BO, CP, &c., comprehendidas entre los planos paralelos ABC, NOP, son iguales *; y así todas las figuras ABON, BCPO, &c., son paralelógramos. Síguese de aquí que el lado ON es igual á AB, OP á BC, QP á CD, &c.; ademas los lados iguales son paralelos: luego * el ángulo ABC = NOP, el ángulo BCD = OPQ, &c.: luego los dos polígonos ABCDE, NOPQR tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales: luego son iguales.

* 12. 5.

* 13. 5.

PROPOSICION XI.

TEOREMA.

Fig. 212. *Dos paralelepípedos rectángulos* AG, AL, *que tienen una misma base* ABCD, *siguen la razon de sus alturas* AE, AI.

Supongamos primeramente que las alturas AE, AI estan entre sí como dos números enteros, v. gr. como 15 : 8.

Dividiremos AE en 15 partes iguales, 8 de los quales contendrá AI; y por los puntos de division x, y, z, &c., tírense planos paralelos á la base.

Estos planos dividirán el sólido AG en 15 paralelepípedos parciales, que serán todos iguales entre sí, pues tienen bases y alturas iguales: bases iguales, porque toda seccion como MIKL, hecha en un prisma paralelamente á la base, es igual á esta base *; y alturas iguales, porque sus alturas son las divisiones mismas Ax, vy, yz, &c. Pero de estos 15 paralelepípedos igua-

* Pr. 10.

les, 8 estan contenidos en AL: luego el sólido AG es al sólido AL como 15 es á 8, ó, en general, como la altura AE es á la altura AI.

En segundo lugar, si la razon de AE á AI no puede expresarse en números, digo que lo mismo se verificará *sólid.* AG : *sólid.* AL : : AE : AI.

Porque supongamos que sea falsa esta proposicion, y que sea en realidad *sol.* AG : *sol.* AL : : AE : AO.

Divídase AE en partes iguales menores todas que OI, y habrá á lo ménos un punto de division *m* entre O é I. Sea P el paralelepípedo que tiene por base ABCD y por altura A*m*.

Puesto que las alturas AE y A*m* son entre sí como dos números enteros, tendremos *sol.* AG: P :: AE: A*m*. Pero, por suposicion, *sol.* AG : *sol.* AL :: AE : AO; de aquí resulta *sol.* AL : P : : AO : A*m*. Pero AO es mayor que A*m*, y seria preciso, para que subsistiese la proporcion, que el sólido P fuese menor que AL; lo que no se verifica: luego es imposible que el quarto término de la proporcion *sólid.* AG: *sólid.* AL:: AE: *x*, sea una línea mayor que AI. Por un raciocinio semejante demostrariamos que el quarto término no puede ser menor que AI: luego ha de ser por precision igual; y por consiguiente sacamos por último que los paralelepípedos rectángulos de una misma base siguen la razon de sus alturas.

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

Dos paralelepípedos rectángulos AG, AK, *que tienen la misma altura* AE, *estan entre sí como sus bases* ABCD, AMNO. Fig. 213.

Habiendo colocado los dos sólidos uno al lado de otro, como los representa la figura, prolónguese el plano ONKL hasta que encuentre al plano DCGH en la direccion PQ, y tendremos un tercer paralelepípedo AQ, que podremos comparar con cada uno de los paralelepípedos AG, AK.

Los dos sólidos AG, AQ, que tienen una misma base AEHD, estan entre sí como sus alturas AB, AO; igualmente los dos sólidos AQ, AK, que tienen la misma base AOLE, estan entre sí como sus alturas AD, AM. Así tendremos las dos proporciones

sol. AG : *sol.* AQ : : AB : AO.

sol. AQ : *sol.* AK : : AD : AM.

Multiplicándolas ordenadamente, y omitiendo en el resultado el factor comun *sol.* AQ, tendremos

sol. AG : *sol.* AK : : AB × AD : AO × AM.

Pero AB×AD representa la base ABCD, y AO×AM la base AMNO: luego dos paralelepípedos rectángulos de una misma altura siguen la razon de sus bases.

PROPOSICION XIII.

TEOREMA.

Dos paralelepípedos rectángulos qualesquiera estan entre sí como los productos de sus bases por sus alturas, ó como los productos de sus tres dimensiones.

Fig. 213. Porque habiendo colocado los dos sólidos AG, AZ, de modo qee sus caras tengan el ángulo comun BAE, prolónguense los planos necesarios para formar el tercer paralelepípedo AK de la misma altura que el paralelepípedo AG. Tendremos, segun la proposicion anterior,

sol. AG : *sol.* AK : : ABCD : AMNO.

Pero los dos paralelepípedos AK, AZ, que tienen la misma base AMNO, siguen la razon de sus alturas AE, AX; así tenemos

sol. AK : *sol.* AZ : : AE : AX.

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y omitiendo en el producto el factor comun *sol.* AK, tendremos *sol.* AG : *sol.* $AZ :: ABCD \times AE : AMNO \times AX$.

En lugar de las bases ABCD y AMNO podemos substituir $AB \times AD$ y $AO \times AM$, lo que dará

sol. AG : *sol.* $AZ :: AB \times AD \times AE : AO \times AM \times AX$.

Luego dos paralelepípedos rectángulos qualesquiera siguen la razon, &c.

Escolio. Síguese de aquí que podemos tomar por medida de un paralelepípedo rectángulo el producto de su base por su altura, ó el producto de sus tres dimensiones. Valiéndonos de este principio valuaremos todos los demas sólidos.

Para entender en qué consiste esta medida, debemos acordarnos que por producto de dos ó mas líneas entendemos el producto de los números que las representan, y estos números penden de la unidad lineal que tomamos por lo comun arbitrariamente. Esto sentado, el producto de las tres dimensiones de un paralelepípedo es un número que nada significa en sí, y que seria distinto si hubiesemos tomado otra unidad lineal. Pero si multiplicamos tambien las tres dimensiones de otro paralelepípedo, valuándolas por la misma unidad lineal, los dos productos estarán entre sí como los sólidos, y darán la idea de su valor relativo.

La magnitud de un sólido, su volúmen ó su extension constituyen lo que llamamos su *solidez*, y empleamos particularmente esta voz para denotar la medida de un sólido; así decimos que la solidez de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura, ó al producto de sus tres dimensiones.

Siendo iguales entre sí las tres dimensiones del cubo, si el lado es 1, la solidez será $1 \times 1 \times 1$, ó 1; si el lado es 2, la solidez será $2 \times 2 \times 2$, ó 8; si el lado es 3, la solidez será $3 \times 3 \times 3$, ó 27, y así sucesivamente; así siendo los lados de los cubos como los números 1, 2, 3, &c., los mismos cubos ó sus solideces estan como los números 1, 8, 27, &c. De aquí viene que en la aritmética se llama *cubo* de un número al producto que resulta de tres factores iguales á dicho número.

Si nos propusiesen construir un cubo duplo de otro dado, seria menester que el lado del cubo que buscamos fuese al lado del cubo dado como la raiz cúbica de 2 es á la unidad. Se halla fácilmente, por medio de una construccion geométrica, la raiz quadrada de 2; pero no podemos hallar así su raiz cúbica, al ménos por las simples operaciones de la Geometría elemental, esto es, no empleando mas que líneas rectas, cuyos puntos nos son conocidos, y círculos, cuyos centros y radios esten determinados.

Por esta razon ha sido tan celebrado entre los antiguos geómetras el problema de *la duplicacion del cubo*, y el de *la triseccion del ángulo*, que es casi del mismo órden. Pero conocemos, ya hace mucho tiempo, las resoluciones que admite esta especie de problemas, las quales, aunque no tan sencillas como las construcciones de la Geometría elemental, son sin embargo igualmente exâctas y rigorosas.

PROPOSICION XIV.

TEOREMA.

La solidez de un paralelepípedo, y en general, la solidez de un prisma qualesquiera es igual al producto de su base por su altura.

Porque 1.° un paralelepípedo qualquiera es equivalente á un paralelepípedo rectángulo de la misma altu-
* Pr. 6. ra y de base equivalente *. Pero la solidez de este es igual á su base multiplicada por su altura: luego tambien la solidez del primero es igual al producto de su base por su altura.

* Pr. 6. 2.° Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de la misma base, y dupla altura *. Pero la solidez de este es igual á su base multiplicada por su

altura: luego la del prisma triangular es igual al producto de su base, que es mitad de la del paralelepípedo, multiplicada por su altura.

3.° Un prisma qualquiera puede dividirse en tantos prismas triangulares de la misma altura, como triángulos podemos formar en el polígono que le sirve de base. Pero la solidez de cada prisma triangular es igual á su base multiplicada por su altura, y de ser una misma la altura para todos, se sigue que la suma de todos los prismas parciales es igual á la de todos los triángulos que les sirven de base multiplicada por la altura comun. Luego la solidez de un prisma polígono qualquiera es igual al producto de su base por su altura.

Coralario. Si comparamos dos prismas que tienen una misma altura, los productos de sus bases por sus alturas seguirán la razon de sus bases: luego *dos prismas de una misma altura siguen la razon de sus bases*; por una razon semejante, *dos prismas de una misma base estan entre sí como sus alturas* (*).

(*) Todo lo que se acaba de demostrar en las proposiciones 11, 12, 13, 14 de este libro acerca de los paralelepípedos, queda demostrado ya en el libro III acerca de los paralelógramos. Se dixo allí: ***que un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura***, y hemos demostrado aquí: ***que un paralelepípedo es igual al producto de su base por su altura.*** Podria esto inducirnos á error, si no considerásemos la diferencia que hay entre ambas expresiones. La base de un paralelógramo es una línea, que, multiplicada por su altura, que tambien es una línea, da una superficie; pero la base de un paralelepípedo es una superficie, que multiplicada por su altura, que siempre es una línea, da una solidez. En general, téngase presente que para formar un sólido son precisas tres líneas, y para formar una superficie solo se necesitan dos; todo esto está comprobado desde la aritmética en las formaciones de los quadrados y cubos de las cantidades. *Nota del Traductor.*

PROPOSICION XV.

LEMA.

Fig. 214. *Si cortamos una pirámide* SABCDE *por un plano* abd *paralelo á la base*,

1.° *Los lados* SA, SB, SC,..... *y la altura* SO *estarán divididas proporcionalmente en* a, b, c,.... *y* o;

2.° *La seccion* abcde *será un polígono semejante á la base* ABCDE.

Porque 1.° los planos ABD, *abd* son paralelos, y sus intersecciones AB, *ab*, formadas por un tercer pla-
* 10. 5. no SAB, serán tambien paralelas *: luego los triángulos SAB, S*ab* son semejantes, y tenemos la proporcion SA : S*a* :: SB : S*b*; tendriamos tambien SB : S*b* :: SC : S*c*, y así sucesivamente. Luego todos los lados SA, SB, SC, &c. están cortados proporcionalmente en *a*, *b*, *c*, &c. La altura SO esta cortada en la misma proporcion en el punto *o*; porque BO y *bo* son paralelas, y tenemos SO : S*o* :: SB : S*b*.

2.° Por ser *ab* paralela á AB, *bc* á BC, *cd* á CD, &c. el ángulo *abc* = ABC, el ángulo *bcd* = BCD, y así de los demas. Ademas, siendo semejantes los triángulos SAB, S*ab*, tenemos AB : *ab* :: SB : S*b*; y por ser semejantes tambien los triángulos SBC, S*bc*, tenemos igualmente SB : S*b* :: BC : *bc*: luego AB : *ab* :: BC : *bc*; tendriamos tambien BC : *bc* :: CD : *cd*, y así sucesivamente. Luego los polígonos *abcde*, ABCDE tienen los ángulos respectivamente iguales, y los lados homólogos proporcionales, y por consiguiente son semejantes.

Corolario. Sean SABCDE, SXYZ dos pirámides cuyo vértice es comun, y cuyas bases están en un mismo plano, de modo que ambas tienen la misma altura; si las cortamos con un plano paralelo al de las bases, sea *abcde* la seccion hecha en la una pirámide, *xyz* la seccion hecha en la otra: digo que *las secciones* abcde, xyz, *es-*

tarán entre sí como las bases ABCDE, XYZ.

Porque los polígonos ABCDE y *abcde*, por ser semejantes, siguen la razon de los quadrados de los lados homólogos AB, *ab*; pero AB : *ab* :: SA : S*a*; luego ABCDE: *abcde* :: $(SA)^2 : (Sa)^2$. Por la misma razon, XYZ : *xyz* :: $(SX)^2 : (Sx)^2$. Pero puesto que *abcxyz* es un solo plano, tenemos tambien SA : S*a* :: SX : S*x*; luego ABCDE: *abcde* :: XYZ : *xyz* : luego las secciones *abcde*, *xyz* siguen la razon de las bases ABCDE, XYZ.

PROPOSICION XVI.

LEMA.

Sea SABC *una pirámide triangular cuyo vértice es* S *y* ABC *la base; si dividimos los lados* SA, SB, SC, AB, AC, BC *en dos partes iguales en los pnntos* D, E, F, G, H, I, *y por estos puntos tiramos las líneas* DE, EF, DF, EG, FH, EI, GH: *digo que podrémos considerar la pirámide* SABC *como compuesta de dos prismas* AGHFDE, EGICFH *equivalentes entre sí, y de dos pirámides iguales* SDEF, EGBI. Fig. 215.

Segun la construccion, ED es paralela á AB y GE á AS: luego la figura ADEG es un paralelógramo. La figura ADFH lo es tambien por la misma razon: luego las tres rectas AD, GE, HF son iguales y paralelas, y el sólido AGHFDE es un prisma.* * 14, 5.

Del mismo modo probarémos que las dos figuras EFCI, CIGH son paralelógramos, y que por consiguiente las tres reetas EF, CI, GH son iguales y paralelas: luego tambien el sólido EGICFH es un prisma. Ahora digo que estos dos prismas triangulares son equivalentes entre sí.

En efecto, si sobre las aristas GI, GE, GH formamos el paralelepípedo GX, el prisma triangular GEICFH será la mitad de este paralelepído*. Por otro lado, el prisma AGHFDE es tambien igual á la mitad del para- * Pr. 6.

...

* Pr. 12. lelepípedo GX*, por tener una misma altura, y ser el triángulo AGH, base del prisma, la mitad del paralelógramo GICH*, base del paralelepípedo. Luego los
* 2, 3. dos prismas EGICFH, AGHFDE son equivalentes entre sí.

Quitando estos dos prismas de la pirámide SABC, solo quedan las dos pirámides SDEF, EGBI, digo pues que estas dos pirámides son iguales.

En efecto, á causa de la igualdad de los lados, esto es, por ser $BE = SE$, $BG = AG = DE$, $EG = AD = SD$, el triángulo BEG es igual al triángulo ESD. Por una razon semejante el triángulo BEI es igual al triángulo SEF; ademas la inclinacion mutua de los dos planos BEG y BEI es la misma que la de los otros dos ESD y SEF, pues BEG y ESD solo forman un plano, lo mismo que BEI con SEF. Luego si para sobreponer las dos pirámides SDEF, EGBI, colocamos el triángulo FBG sobre su igual SDE, será menester que el plano BEI coincida con SEF; y ya que los triángulos EBI, SEF son iguales y estan colocados semejantemente, el punto I caerá en F, y las dos pirámides SDEF, EGBI coincidirán en una sola.

Luego la pirámide entera SABC está compuesta de dos prismas triangulares AGF, GIE equivalentes entre sí, y de dos pirámides iguales SDEF, EGBI.

Corolario I. Desde el vértice S báxese al plano ABC la perpendicular SO, y sea P el punto en que esta perpendicular encuentra al plano DEF paralelo á ABC.
* Pr. 12. Puesto que $SD = \frac{1}{2}SA$, tendremos $SP = \frac{1}{2}SO$*, y el triángulo $DEF = \frac{1}{4}ABC$: luego la solidez del prisma $AGHFDE = \frac{1}{4}ABC \times \frac{1}{2}SO$, y la de los dos prismas reunidos AGHFDE, $EGICFH = \frac{1}{4}ABC \times SO$. Estos dos prismas son menores que la pirámide SABC, que los contiene: luego *la solidez de una pirámide triangular es mayor que la quarta parte del producto de su base por su altura.*

Corolario II. Si tiramos las rectas DG, DH, tendre-

mos una nueva pirámide, que será igual á la pirámide SDEF; porque podemos sobreponer la base DEF á su igual AGH, y entónces los ángulos SDE, SDF serán iguales á los ángulos DAG, DAH, y se echa de ver que DS caerá sobre AD*, y el vértice S sobre el vértice D. * 25, 5. Escol.
Pero la pirámide ADGH es menor que el prisma AGHDEF que la contiene: luego cada una de las pirámides SDEF, EGBI es menor que el prisma AGHDEF: luego la pirámide SABC, que está compuesta de dos pirámides y de dos prismas, es menor que quatro de estos prismas. Pero la solidez de uno de ellos $=\frac{1}{8}$ABC × SO, y su quadruplo $=\frac{1}{2}$ABC × SO: luego *la solidez de qualquiera pirámide triangular es menor que la mitad del producto de su base por su altura.*

PROPOSICION XVII.

TEOREMA.

La solidez de un pirámide triangular es igual á la tercera parte del producto de su base por su altura. Fig. 125.

Sea SABC una pirámide triangular qualquiera, ABC su base, SO su altura: digo que la solidez de esta pirámide será igual á la tercera parte del producto de la superficie ABC por la altura SO, de modo que tendremos SABC $=\frac{1}{3}$ABC × SO, ó SO × $=\frac{1}{3}$ABC.

Porque si se niega esta proposicion, es forzoso que la solidez SABC sea igual al producto de SO por una cantidad mayor ó menor que $\frac{1}{3}$ABC.

Sea 1.° esta cantidad mayor, de suerte que tengamos SABC = SO. ($\frac{1}{3}$ABC + M). Haciendo la misma construccion que en la proposicion anterior, la pirámide SABC quedará dividida en dos prismas equivalentes entre sí AGHFDE, EGICFH, y en dos pirámides iguales SDEF, EGBI. Pero la solidez del prisma AGHFDE es DFE × PO, y la de los dos prismas es por consiguiente DFE × 2PQ, ó DFE × SO. Quitando los dos prismas de la pirámide entera, el resto será igual al duplo de la pirámide SDEF, de modo que tendremos $2SDEF = SO \times (\frac{1}{3}ABC + M - DFE)$. Pero, por ser SA duplo de SD, la superficie ABC es quadrupla de DFF*, y así $\frac{1}{3}ABC - DFE = \frac{4}{3}DFE - DEF = \frac{1}{3}DFE$: luego

* Pr. 15.

$$2SDEF = SO \times (\tfrac{1}{3} DEF + M).$$

Y así, sacando de ambas partes la mitad, tendremos

$$SDEF = SP \times (\tfrac{1}{3}DEF + M).$$

Donde vemos que para sacar la solidez de la pirámide SDEF, debemos añadir á la tercera parte de su base la misma superficie M que habiamos añadido á la tercera parte de la base de la pirámide grande, y multiplicar la suma por la altura SP de la pirámide pequeña.

Si dividimos SD en dos partes iguales en el punto K, y por este punto hacemos pasar el plano KLM paralelo á DEF, que encuentra en Q á la perpendicular SP, la misma demostracion prueba que la solidez de la pirámide SKLM será igual á $SQ \times (\frac{1}{3}KLM + M)$.

Continuando así en formar una serie de pirámides, cuyos lados vayan decreciendo en razon dupla, y las bases en razon quadrupla, daremos en breve con una pirámide $Sabc$, cuya base abc sea menor que 6M. Sea So la altura de esta última pirámide; y su solidez, deducida de las de las pirámides anteriores, será $So \times (\frac{1}{3}abc + M)$. Pero tenemos $M > \frac{1}{6}Sabc$, y por consiguiente $\frac{1}{3}abc + M > \frac{1}{2}abc$: luego seria menester que la solidez de la pirámide $Sabc$ fuese mayor que $So \times \frac{1}{2}abc$; resultado absurdo, pues hemos probado en el corolario II de la proposicion anterior que la solidez de una pirámide triangular es siempre menor que la mitad del producto de su base por su altura: luego 1.° es imposible que la solidez de la pirámide SABC sea mayor que $SO \times \frac{1}{3}ABC$.

Sea 2.° $SABC = SO \times (\frac{1}{3}ABC - M)$, y probaremos como en el caso primero que la solidez de la pirámide SDEF, cuyas dimensiones son dos veces menores, es igual á $SP \times (\frac{1}{3}DEF - M)$, y continuando la serie de pirámides cuyos lados decrecen en razon dupla hasta un término qualquiera $Sabc$, tendremos tambien la solidez de la última pirámide $Sabc = So \times (\frac{1}{3}abc - M)$. Pero como las bases ABC, DEF, LKM..... abc forman una serie decreciente en que cada término es la quarta parte de su anterior, llegarémos en breve á un término abc igual 12M, ó que estará entre 12M y 13M; en tal caso siendo M igual ó mayor que $\frac{1}{12}abc$, la cantidad $\frac{1}{3}abc -$ M será igual ó menor que $\frac{1}{4}abc$; de suerte que la solidez de la pirámide $Sabc$ será $= So \times \frac{1}{4}abc$, ó $< So \times \frac{1}{4}abc$. Resulta tambien absurdo, pues segun el corolario I de la proposicion antecedente, la solidez de una pirámide triangular siempre es mayor que la quarta parte del producto de su base por su altura: luego 2.° la solidez de la pirámide SABC no puede ser menor que $SO \times \frac{1}{3}ABC$.

Luego finalmente la solidez de la pirámide $SABC = SO \times \frac{1}{3}ABC$, ó $= \frac{1}{3}ABC \times SO$, segun la cabeza de la proposicion.

Corolario I. Toda pirámide triangular es la tercera parte del prisma triangular de la misma base y altura que ella; porque $ABC \times SO$ es la solidez del prisma cuya base es ABC y SO la altura.

Corolario II. Dos pirámides triangulares de una misma altura siguen la razon de sus bases, y dos pirámides triangulares de una misma base siguen la razon de sus alturas.

PROPOSICION XVIII.

TEOREMA.

Toda pirámide SABCDE *tiene por medida la tercera parte del producto de su base por su altura.* Fig. 214.

Porque haciendo pasar los planos SEB, SEC por las diagonales EB, EC, quedará dividida la pirámide SABCDE en muchas pirámides triangulares, que tendrán todas la misma altura SO. Pero por el teorema anterior cada una de estas pirámides se mide multiplicando cada una de estas bases ABE, BCE, CDE por el tercio de la altura SO: luego la suma de las pirámides triangulares, ó la pirámide polígona SABCDE, tendrá por medida la suma de los triángulos ABE, BCE, CDE, ó el polígono ABCDE, multiplicado por $\frac{1}{3}$SO: luego la medida de toda la pirámide es la tercera parte del producto de su base por su altura.

Corolario I. Toda pirámide es la tercera parte del prisma de la misma base y altura que ella.

Corolario II. Dos pirámides de una misma altura siguen la razon de sus bases, y dos pirámides de una misma base estan entre sí como sus alturas.

Escolio. Podemos valuar la solidez de qualquiera poliedro descomponiéndolo en pirámides, y esta descomposicion puede ser de muchos modos: uno de los mas sencillos es hacer pasar los planos de division por el vértice de un mismo ángulo sólido; en este caso tendremos tantas pirámides parciales como caras tiene el poliedro, excepto las que forman el ángulo sólido de donde salen los planos de division.

PROPOSICION XIX.

TEOREMA.

Si cortamos una pirámide con un plano paralelo á su base, el tronco que queda, quitando la pirámide pequeña, es igual á la suma de las tres pirámides que tendrian por altura comun la del tronco; y cuyas bases serian la base inferior del tronco, su base superior, y una media proporcional entre estas dos bases.

Fig. 217. Sea SABCDE una pirámide cortada por el plano *abd* paralelo á la base; sea TFGH una pirámide triangular, cuya base y altura sean iguales ó equivalentes á las de la pirámide SABCDE.

Podemos suponer las dos bases situadas en un mismo plano, y entónces el plano *abd* prolongado, determinará en la pirámide triangular una seccion *fgh*, situada á la misma altura sobre el plano comun de las bases; de donde resulta que la seccion *fgh* es á la seccion *abd* como la base FGH es á la base ABD *; y ya que las bases son equivalentes, las secciones lo serán tambien. Por consiguiente, las pirámides S*abcde* y T*fgh* son equivalentes, pues tienen una misma altura y las bases equivalentes. Las pirámides enteras SABCDE, TFGH son equivalentes por la misma razon: luego los troncos ABD*dab*, FGH*hfg* son equivalentes, y por consiguiente bastará demostrar la proposicion solamente en el caso del tronco de pirámide triangular. * Pr. 15.

Sea FGH*hfg* un tronco de pirámide triangular de bases paralelas. Por los tres puntos F, *g*, H llévese el plano F*g*H: que rebaxará del tronco la pirámide triangular *g*FGH. Esta pirámide tiene por base la base inferior FGH del tronco; tiene tambien por altura la altura del tronco; pues el vértice *g* está en el plano de la base superior *fgh*.

Despues de haber rebaxado esta pirámide, queda la pirámide quadrangular *gfh*HF, cuyo vértice es *g*, y la base *fh*HF. Por los tres puntos *f*, *g*, H hágase pasar el plano *fg*H, que dividirá la pirámide quadrangular en dos triangulares *g*F*f*H, *gfh*H. Esta última tiene por base la base superior *gfh* del tronco, pues su vértice H pertenece á la base inferior: así tenemos ya dos de las tres pirámides que deben componer el tronco.

Nos resta que considerar la tercera *g*F*f*H. Si tiramos *g*K paralela á *f*F, é imaginamos una nueva pirámide *f*FHK, cuyo vértice es K, y la base F*f*H, estas dos pirámides tendrán la misma base F*f*H; tambien tendrán la misma altura, pues los vértices *g*, K estan situados en una línea *g*K paralela á F*f*, y por consiguiente paralela al plano de la base: luego estas pirámides son equivalentes; pero la pirámide *f*FKH puede considerarse como que tiene su vértice en *f*, y así ten-

drá la misma altura que el tronco. En quanto á su base FKH, digo que es media proporcional entre las bases FGH, *fgh*. En efecto, los triángulos FHK, *fgh* tienen los ángulos en F y *f* iguales, y un lado igual
* 24. 3. FK = *fg*: luego * FHK: *fgh* : : FH : *fh*. Tenemos tambien FGH : FHK : : FG : FK ó *fg*. Pero los triángulos semejantes FGH y *fgh* dan FG : *fg* : : FH : *fh*; luego FGH : FHK : : FHK : *fgh*; y así la base FHK es media proporcional entre las dos bases FGH, *fgh*. Luego un tronco de pirámide triangular de bases paralelas equivale á tres pirámides, cuya altura comun es la del tronco, y cuyas bases son la base inferior del tronco, su base superior, y una media proporcional entre estas dos bases.

PROPOSICION XX.

TEOREMA.

Fig. 216. *Si cortamos un prisma triangular, cuya base es* ABC, *con un plano* DEF *inclinado á esta base, el sólido* ABCDEF *que resulta de esta seccion, será igual á la suma de las tres pirámides, cuyos vértices son* D, E, F, *y la base comun* ABC.

Por los tres puntos F, A, C hágase pasar el plano FAC, que rebaxará del prisma truncado ABCDEF la pirámide triangular FABC, que tiene ABC por base y por vértice el punto F.

Despues de haber quitado esta pirámide, quedará la pirámide quadrangular FACDE, cuyo vértice es F y ACDE la base. Por los tres puntos F, E, C hágase pasar tambien un plano FEC, que dividirá á la pirámide quadrangular en dos pirámides triangulares FACE, FCDE.

La pirámide FAEC, que tiene por base el triángulo AEC, y por vértice el punto F, es equivalente á otra pirámide EABC, que tuviese por base AEC, y por vértice el punto B. Porque estas dos pirámides tienen una misma base; tambien tienen la misma altura, porque siendo BF paralela á cada una de las líneas AE, CD lo es igualmente á su plano ACE: luego la pirámide FAEC es equivalente á la pirámide EABC, que podemos considerarla como que tiene por base ABC y por vértice el punto E.

La tercera pirámide FCDE puede transformarse primeramente en AFCD; porque teniendo estas dos pirámides la misma base FCD, tienen tambien una misma altura, pues AE es paralela al plano FCD: luego la pirámide FCDE es equivalente á AFCD. Despues la pirámide AFCD puede transformarse en ABCD, porque estas dos pirámides tienen comun la base ACD; tienen tambien la misma altura, por estar sus vértices F y B en una paralela al plano de la base. Luego la pirámide FCDE, equivalente á AFCD, lo es tambien á ABCD; y esta la podemos considerar como que tiene por base ABC, y por vértice el punto D.

Luego finalmente el prisma truncado ABCDEF es igual á la suma de las tres pirámides que tienen por base comun ABC, y cuyos vértices son respectivamente los puntos D, E, F.

Corolario. Si las aristas AE, BF, CD son perpendiculares al plano de la base, serán al mismo tiempo las alturas de las tres pirámides que componen el prisma truncado; de modo que la solidez de este prisma truncado será $\frac{1}{3}ABC \times AE + \frac{1}{3}ABC \times BF + \frac{1}{3}ABC \times CD$, cantidad que se reduce $\frac{1}{3}ABC.(AE + BF + CD)$.

PROPOSICION XXI.

TEOREMA.

Dos pirámides triangulares semejantes tienen las caras homólogas semejantes, y los ángulos sólidos homólogos iguales.

Fig. 203. Segun la definicion, las dos pirámides triangulares SABC, TDEF son semejantes si los dos triángulos SAB, ABC son semejantes á los otros dos TDE, DEF, y estan semejantemente colocados, esto es, si tenemos el ángulo ABS = DET, BAS = EDT, ABC = DEF, BAC = EDF, y si ademas la inclinacion de los planos TDE, DEF es igual á la de SAB, ABC: esto supuesto, digo que todas estas pirámides tienen todas sus caras respectivamente semejantes, y los ángulos sólidos homólogos iguales.

Tómese BG = ED, BH = EF, BI = ET, y tírense GH, GI, IH.

La pirámide TDEF es igual á la pirámide IGBH; porque habiendo tomado los lados GB y BH iguales á DE y EF, y siendo por suposicion iguales los ángulos GBH y DEF, el triángulo HGB es igual á FDE. Luego para verificar la superposicion de las dos pirámides, podemos primero sobreponer la base DEF á su igual GBH. Despues, ya que la inclinacion de los planos DTE y DEF es la misma que la de SAB y ABC, claro está que la inclinacion del plano DET sobre BAS será indefinida. Pero, por hipótesis, el ángulo DET = GBI: luego ET caerá sobre su igual BI, y puesto que los quatro puntos D, E, F, T coinciden con los otros quatro
* pr. 1. G, B, H, I, síguese* que la pirámide TDEF coincide con la pirámide IGBH.

Por ser iguales los triángulos DEF y GBH, tenemos el ángulo BGH = EDF = BAC: luego GH es para-
13, 5. lela á AS, y el plano IGH es paralelo á SAC. Dedú-

cese de aquí que el triángulo IGH, ó su igual TDF, es semejante á SAC *, y que el triángulo IBH, ó su igual TEF, es semejante á SBC: luego las dos pirámides triangulares semejantes SABC, TDEF tienen las quatro caras respectivamente semejantes, y ademas tienen los ángulos sólidos homólogos iguales. * pr. 15.

Porque ya hemos sobrepuesto el ángulo sólido E á su homólogo B, y podriamos hacer lo mismo con otros dos ángulos sólidos homólogos qualesquiera; pero vemos inmediatamente que dos ángulos sólidos homólogos son iguales, v. gr. los ángulos T y S, porque estan formados por tres ángulos planos iguales cada uno al suyo, y semejantemente dispuestos.

Luego dos pirámides triangulares semejantes tienen las caras homólogas semejantes, é iguales los ángulos sólidos homólogos.

Corolario I. Los triángulos semejantes en las dos pirámides nos dan las proporciones AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF; luego *en las pirámides triangulares semejantes los lados homólogos son proporcionales.*

II. Y siendo iguales los ángulos sólidos homólogos, síguese que *la inclinacion de dos caras qualesquiera de una pirámide es igual á la inclinacion de las dos caras homólogas de la pirámide semejante.*

III. Si cortamos la pirámide SABC con un plano GHI paralelo á una de las caras SAC, la pirámide parcial BGIH será semejante á la pirámide total BASC; porque los triángulos BGI, BGH son respectivamente semejantes á los triángulos BAS, BAC, y estan colocados semejantemente; la inclinacion de sus planos es la misma por ambas partes: luego las dos pirámides son semejantes.

IV. En general, *si cortamos una pirámide qualquiera* SABCDE *con un plano* abcde *paralelo á la base, la pirámide parcial* Sabcde *será semejante á la pirámide entera* SABCDE. Porque las bases ABCDE, *abcde* son Fig. 214.

semejantes, y si tiramos AC y *ac* acabamos de probar que la pirámide triangular SABC es semejante á la pirámide S*abc*: luego el punto S está determinado respecto á la base ABC, como el punto S lo está respecto á la base *abc* *: luego las dos pirámides SABCDE, S*abcde* son semejantes.

* Def. 1.

Escolio. En vez de los cinco datos que son necesarios segun la definicion para que dos pirámides triangulares sean semejantes, podriamos substituir otros cinco segun diversas combinaciones, y resultarian otros tantantos teoremas, entre los quales podemos distinguir este: *dos pirámides triangulares son semejantes quando tienen sus lados homólogos proporcionales.*

Fig. 203.

Porque si tenemos las proporciones AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF, que encierra cinco condiciones, los triángulos ABS y ABC serán semejantes á los triángulos DET y DEF, y estarán semejantemenre dispuestos. Tendremos tambien el triángulo SBC semejante á TEF : luego los tres ángulos planos que forman el ángulo sólido B serán iguales respectivamente á los que forman el ángulo sólido E: de donde se deduce que la inclinacion de los planos SAB, ABC es igual á la de sus homólogos TDE, DEF, y que por consiguiente las dos pirámides son semejantes.

PROPOSICION XXII.

TEOREMA.

Fig 219. *Dos poliedros semejantes tienen las caras homólogas semejantes, é iguales los ángulos sólidos homólogos.*

Sea ABCDE la base de un poliedro; sean M y N los vértices de dos ángulos sólidos, fuera de dicha base, determinados por las pirámides triangulares MABC, NABC, cuya base comun es ABC. Sea en el otro poliedro, *abcde* la base homóloga ó semejante á ABCDE, *m* y *n* los vértices homólogos á M y N, determinado por las pirámides *mabc*, *nabc* semejantes á las pirámides MABC, NABC: digo desde luego que las distancias MN, *mn* son proporcionales á los lados homólogos AB, *ab*.

En efecto, siendo semejantes las pirámides MABC, *mabc*, la inclinacion de los planos MAC, BAC es igual á la de los planos *mac*, *bac*; igualmente, por ser semejantes las pirámides NABC, *nabc*, la inclinacion de los planos NAC, BAC es igual á la de los planos *nac*, *bac*: luego restando las primeras inclinaciones de las últimas, quedará la inclinacion de los planos NAC, MAC igual á la de *nac*, *mac*. Pero por ser semejantes estas mismas pirámides, el triángulo MAC es semejante á *mac*, y el triángulo NAC lo es á *nac*: luego las dos pirámides triangulares MNAC, *mnac* tienen dos caras respectivamente semejantes, semejantemente dispuestas é igualmente inclinadas entre sí: luego estas pirámides son semejantes *, y sus lados homólogos dan la proporcion MN : *mn* : : AM : *am*. Por otra parte AM : *am* : : AB : *ab*; luego MN : *mn* : : AB : *ab*. * Pr.21.

Sean P y *p* otros dos vértices homólogos de los mismos poliedros, y tendremos tambien PN : *pn* : : AB : *ab*, PM : *pm* : : AB : *ab*. Luego MN : *mn* : : PN : *pn* : : PM : *pm*. Luego *el triángulo* PNM, *que une tres vértices qualesquiera de un poliedro, es semejante al triángulo* pnm, *que une los tres vértices homólogos del otro poliedro.*

Sean todavia Q y *q* dos vértices homólogos, y el triángulo PNQ será semejante á *pnq*. Digo ademas que la inclinacion de los planos PQN, PMN es igual á la de los planos *pqn*, *pmn*.

Porque si tiramos QM y *qm*, tendrémos siempre el triángulo QNM semejante á *qnm*, y por consiguiente el ángulo QNM igual á *qnm*. Concíbase en N un ángulo sólido formado por los tres ángulos planos QNM, QNP, PNM, y en *n* otro ángulo sólido formado por los tres ángulos planos *qnm*, *qnp*, *pnm*; siendo estos ángulos iguales, síguese que los ángulos sólidos lo son tambien. Luego la inclinacion de los dos planos PNQ, PNM es igual á la de sus homólogos *pnq*, *pnm*; luego si los dos triángulos PNQ, PNM estuviesen en un mismo plano, en cuyo caso seria el ángulo QNM = QNP + PNM: tendriamos tambien el ángulo *qnm* = *qnp* + *pnm* y los dos triángulos *qnp*, *pnm* estarian tambien en un mismo plano.

Todo lo que acabamos de demostrar se verifica, sean los que fueren los ángulos M, N, P, Q, comparados con sus homólogos *m*, *n*, *p*, *q*.

Supongamos ahora que la superficie de uno de los poliedros esté dividida en triángulos ABC, ACD, MNP, NQP, &c., y vemos que la superficie del otro tendrá igual número de triángulos *abc*, *acd*, *mnp*, *npq*, &c. Semejantes y semejante dispuestos; y si muchos triángulos, como MNP, NPQ, &c., pertenecen á una misma cara, y estan en un mismo plano, tambien sus homólogos *mpn*, *npq* estarán en un mismo plano. Luego toda cara polígona en un poliedro corresponderá á otra cara polígona semejante en el otro poliedro: luego los dos poliedros estarán compuestos de un mismo número de planos semejantes y semejantemente dispuestos. Digo tambien que los ángulos sólidos homólogos serán iguales.

Porque si el ángulo sólido N, v. gr., está formado por los ángulos planos QNP, PNM, MNR, QNR, el ángulo sólido *n* estará formado por los ángulos planos *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*. Pero estos ángulos planos son respectivamente iguales unos á otros, y la inclinacion de dos planos adyacentes es la misma que la de sus homólogos: luego los dos ángulos sólidos pueden sobreponerse, y por lo mismo son iguales.

Luego finalmente dos poliedros semejantes tienen las caras homólogas semejantes y los ángulos sólidos homólogos iguales.

Corolario. Dedúcese de la demostracion anterior, que si formamos una pirámide triangular con quatro vértices de un poliedro, y formamos otra tambien con quatro vértices homólogos de otro poliedro semejante, serán semejantes estas dos pirámides; porque tendrán los lados homólogos proporcionales.* * Pr. 21. Escol.

Vemos al mismo tiempo que dos diagonales homólogas*, v. gr., AN, *an*, siguen la razon de dos lados homólogos AB, *ab*. * 17. 2.

PROPOSICION XXIII.

TEOREMA.

Dos poliedros semejantes pueden dividirse en un mismo número de pirámides triangulares respectivamente semejantes, y semejantemente colocadas.

Porque ya hemos visto que las superficies de dos poliedros pueden dividirse en un mismo número de triángulos semejantes cada uno al suyo: y dispuesto semejantemente. Considérense todos los triángulos de un poliedro, excepto los que forman el ángulo sólido A, como las bases de otras tantas pirámides triangulares que tienen su vértice en A; estas pirámides juntas compondrán el poliedro. Divídase igualmente el otro poliedro en pirámides que tengan por vértice comun el punto *a*, homólogo á A; claro está que la pirámide que une quatro vértices de un poliedro será semejante á la que une quatro vértices homólogos del otro poliedro. Luego dos poliedros semejantes, &c.

PROPOSICION XXIV.

TEOREMA.

Dos pirámides semejantes están entre sí como los cubos de sus lados homólogos.

Porque siendo semejantes estas dos pirámides, la menor podrá colocarse en la mayor, de modo que tengan comun el ángulo sólido S. Entónces las bases ABCDE, Fig. 214.

abcde serán paralelas; porque, siendo semejantes las ca-
* Pr. 22. ras homólogas*, el ángulo S *ab* es igual á SAB, lo mismo que S*bc* á SBC: luego el plano *abc* es paralelo al
* 13. 5. plano ABC.*

Esto sentado, sea SO la perpendicular baxada desde el vértice S al plano ABC, y sea *o* el punto en que esta perpendicular encuentra al plano *abc*; tendrémos, segun
* Pr. 15. lo que hemos demostrado en otra parte*, SO : S*o* :: SA: S*a* :: AB : *ab*, y por consiguiente, $\frac{1}{3}$SO : $\frac{1}{3}$S*o* :: AB : *ab*. Pero siendo las bases ABCDE, *abcde* figuras semejantes, tenemos ABCDE : *abcde* :: AB^2 : $ab.^2$ Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, resultará

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SO : abcde\ \tfrac{1}{3}So :: (AB)^3 : (ab).^3$$

* Pr. 18. Pero ABCDE × $\frac{1}{3}$SO es la solidez de la pirámide SABCDE* y *abcde* × $\frac{1}{3}$S*o* es la pirámide S*abcde*: luego dos pirámides semejantes siguen la razon de los cubos de sus lados homólogos.

PROPOSICION XXV.

TEOREMA.

Dos poliedros semejantes estan entre sí como los cubos de los lados homólogos.

Fig. 219. Porque dos poliedros semejantes pueden dividirse en un mismo número de pirámides triangulares respectiva-
* Pr. 23. mente semejantes*. Pero las dos pirámides semejantes APNM, *apnm* estan entre sí como los cubos de los lados homólogos AM, *am*, ó como los cubos de los lados homólogos AB, *ab*. La misma razon se verificaria entre otras dos pirámides homólogas qualesquiera: luego la suma de todas las pirámides que componen un poliedro, ó el mismo poliedro, es al otro poliedro como el cubo de un lado qualquiera del primero es al cubo del lado homólogo del segundo.

Escolio general.

Se puede presentar en términos algebráicos, esto es, del modo mas sucinto, la recapitulacion de las principales proposiciones de este libro relativas á las solideces de los poliedros.

Sea B la base de un prisma, H su altura; la solidez del prisma será $B \times H$, ó BH.

Sea B la base de una pirámide, H su altura; la solidez de la pirámide será $B \times \frac{1}{3}H$, ó $H \times \frac{1}{3}B$, ó $\frac{1}{3}BH$.

Sea H la altura de un tronco de pirámide de bases paralelas y sean estas A y B; $\sqrt{AB}$ será la media proporcional entre ellas, y la solidez del tronco será $\frac{1}{3}H \times (A + B + \sqrt{AB})$.

Sea B la base de un tronco de prisma triangular; H, H′, H″ las alturas de sus tres vértices superiores; la solidez del prisma truncado será $\frac{1}{3}B\,(H + H' + H''.)$

Sean igualmente P y p las solideces de dos poliedros semejantes, A y a dos lados homólogos de estos poliedros; tendremos $P : p :: A^3 : a^3$.

LIBRO VII.

LA ESFERA.

DEFINICIONES.

I. La *esfera* es un sólido terminado por una superficie curva, cuyos puntos equidistan todos de otro interior llamado *centro*.

Podemos imaginar que la esfera está producida por la revolucion del semicírculo DAE al rededor del diámetro DE; porque la superficie descrita en este movimiento por la curba DAE tendrá todos sus puntos equidistantes del centro C.

Fig. 220.

II. *El rádio de la esfera* es una línea recta tirada desde el centro á un punto de la superficie; el *diámetro* ó *exe* es una recta que pasa por el centro y se termina por ambas partes en la superficie.

Todos los rádios de la esfera son iguales; todos los diámetros son iguales y duplos de los radios.

III. Se demostrará * que toda seccion hecha en la esfera por un plano es un círculo; esto sentado, se llama *círculo máxîmo* la seccion que pasa por el centro, y *círculo menor* la que no pasa por el centro.

* Pr. 1.

IV. Un *plano* es *tangente* á la esfera, quando solo tiene un punto comun con su superficie.

V. El *polo de un círculo* de la esfera es un punto de la superficie equidistante de todos los puntos de la circunferencia de este círculo. Ya haremos ver * mas adelante que todo círculo máxîmo ó menor tiene siempre dos polos. * Pr. 6.

VI. *Triángulo esférico* es una parte de la superficie de la esfera terminada por tres arcos de círculos máxîmos.

Estos arcos, que se llaman los lados del triángulo, los suponemos siempre menores que la semicircunferencia. Los ángulos que forman sus planos son los ángulos del triángulo.

VII. Un triángulo esférico se dice *rectángulo*, *isósceles*, *equilátero* en los mismos casos que un triángulo rectilíneo.

VIII. *Polígono esférico* es una parte de la superficie de la esfera terminada por muchos arcos de círculos máxîmos.

IX. *Huso esférico* es la parte de la superficie de la esfera comprehendida entre dos semicírculos máxîmos que se terminan en un diámetro comun.

X. Llamaré *esquina..... esférica* la parte del sólido de la esfera comprehendida entre los mismos semicírculos máxîmos, y á la qual sirve de base el huso esférico.

XI. *Pirámide esférica* es la parte del sólido de la esfera comprehendida por los planos de un ángulo sólido, cuyo vértice está en el centro. La *base* de la pirámide es el polígono esférico interceptado por los mismos planos.

XII. Se llama *zona* la parte de la superficie de la esfera comprehendida entre dos planos paralelos, que son sus *bases*. Uno de estos planos puede ser tangente á la esfera, y entónces la zona no tiene mas que una base.

XIII. *Segmento esférico* es la porcion del sólido de la esfera comprehendida entre dos planos paralelos que son sus bases. Uno de estos planos puede ser tangente á la esfera, en cuyo caso el segmento esférico no tiene mas que una base.

XIV. El *exe* ó *altura* de una zona y de un segmenmento es la distancia de los dos planos paralelos que son las bases de la zona ó del segmento.

Fig. 220. XV. Miéntras el semicírculo DAE, girando al rededor del diámetro DE, describe la esfera, todo sector circular, como DCF ó FCH, describe un sólido que llamamos *sector esférico*.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Toda seccion de la esfera, hecha por un plano, es un círculo.

Fig. 121. Sea AMB la seccion hecha por un plano en la esfera cuyo centro es A.

Desde el punto C tírese al plano AMB la perpendicular CO, y diferentes líneas CM, CM á diversos puntos de la curba AMB, que termina la seccion.

Las obliquas CM, CM, CB son iguales, por ser radios de la esfera, y por consiguiente equidistan de la
* 5. 5. perpendicular CO*: luego todas las líneas OM, OM, OB son iguales: luego la seccion AMB es un círculo, cuyo centro es el punto O.

Corolario I. Si la seccion pasa por el centro de la esfera, su radio será el radio mismo de la esfera: luego todos los círculos máxîmos son iguales.

II. Dos círculos máxîmos se cortan siempre en dos partes iguales; porque su interseccion comun, pasando por el centro, será un diámetro.

III. Todo círculo máxîmo divide á la esfera y á su superficie en dos partes iguales; porque si despues de haber separado los dos hemisferios, se les aplica sobre la base comun volviendo su convexîdad hácia un mismo lado, las dos superficies coincidirán una con otra, pues á no ser así habria puntos mas inmediatos unos que otros del centro.

IV. El centro de un círculo menor y el de la esfera están en una misma recta perpendicular al plano del círculo menor. Fig. 221.

V. Los círculos menores son mas pequeños á proporcion que distan mas del centro de la esfera; porque quanto mayor es la distancia CO, tanto menor es la cuerda AB diámetro del círculo menor AMB.

VI. Por dos puntos dados en la superficie de la esfera, podemos hacer pasar un arco de círculo máxîmo; porque estos dos puntos y el centro de la esfera son tres puntos que determinan la posicion de un plano. Sin embargo, si los dos puntos dados estuviesen en los extremos de un diámetro, entónces el centro estaria en una misma línea recta con ellos, y serian infinitos los círculos máxîmos que podrian pasar por los dos puntos dados.

PROPOSICION II.

TEOREMA.

En todo triángulo esférico ABC, *un lado qualquiera es menor que la suma de los otros dos.* Fig. 222.

Sea O el centro de la esfera.

Tírense los radios OA, OB, OC.

Si imaginamos los planos AOB, AOC, COB, estos planos formarán en el punto O un ángulo sólido; y los ángulos AOB, AOC, COB tendrán por medida los lados AB, AC, CB del triángulo esférico ABC. Pero cada uno de los tres ángulos planos que componen el ángulo sólido es menor que la suma de los otros dos*: luego un lado qualquiera del triángulo ABC es menor que la suma de los otros dos.

* 21. 3.

PROPOSICION III.

TEOREMA.

La distancia mas corta entre dos puntos en la superficie de la esfera, es el arco de círculo máxîmo que los une.

Fig. 223. Sea ANB el arco de círculo máxîmo que une los puntos A y B; y sea, si es posible, M un punto de la línea mas corta de A á B.

Por el punto M háganse pasar los arcos de círculo máxîmo MA, MB, y tómese BN=MB.

Segun el teorema anterior, el arco ANB es mas corto que AM+MB, quitando de ambas partes BN=BM, quedará AN>AD. Pero la distancia de B á M confúndase ó no con el arco BM, es igual á la de B á N; porque haciendo girar el plano del círculo máximo BM al rededor del diámetro que pasa por B, podemos hacer coincidir el punto M en N; y en este caso la línea mas corta de M á B, sea la que fuere, se confundirá con la de N á B: luego las dos distancias de A á B, pasando la una por M y la otra por N, tienen una parte igual de M á B y de N á B. La primera distancia es, por hipótesis, la mas corta: luego la distancia de A á M es mas corta que la de A á N; lo qual seria un absurdo, pues el arco AM es mayor que AN: luego ningun punto de la línea mas corta entre A y B puede estar fuera del arco ANB: luego este arco es la distancia mas corta entre sus extremos.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

La suma de los tres lados de un triángulo esférico es menor que la circunferencia de un círculo máxîmo.

Fig. 224. Sea ABC un triángulo esférico qualquiera.

Prolónguense los lados AB, AC hasta que se vuelvan á encontrar en D.

Los arcos ABD, ACD serán semicircunferencias, una vez que dos círculos máxîmos se cortan siempre en dos partes iguales *; pero en el triángulo BCD tenemos el lado $BC < BD + CD$ *; añadiendo por ambas partes $AB + AC$, tendremos $AB + AC + BC < ABD + ACD$, esto es, menor que una circunferencia. * Pr. I. * Pr. 8.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

La suma de los lados de qualquiera polígono esférico es menor que la circunferencia de un círculo máxîmo.

Sea, v. gr., el pentágono ABCDE. Fig. 225.

Prolónguense los lados AB, DC hasta que se encuentren en F.

Ya que BC es menor que $BF + CF$, el contorno del pentágono ABCDE es tambien menor que el del quadrilátero AEDF. Prolónguense otra vez los lados AF, FD hasta que se encuentren en G. Tendremos $ED < EG + GD$: luego el perímetro del quadrilátero AEDF es menor que el del triángulo AFG; este es menor que la circunferencia de un círculo máxîmo: luego con mayor razon el perímetro del polígono ABCDE es menor que dicha circunferencia.

Escolio. Esta proposicion es en rigor la misma que la XXII. del libro V; porque si O es el centro de la esfera, podemos imaginar en el punto O un ángulo sólido formado por los ángulos planos AOB, BOC, COD, &c. y la suma de estos ángulos debe ser menor que quatro rectos; lo qual en nada difiere de la proposicion presente. La demostracion que acabamos de hacer es diferente de la del libro V; en una y otra se supone que el polígono ABCDE es *convexô*, ó que ningun lado prolongado puede cortar á la figura.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

Fig. 149. *Si tiramos el diámetro* DE *perpendicular al plano del círculo máxîmo* AMB, *los extremos de este diámetro serán los polos del círculo* AMB, *y de todos los círculos menores como* FNG, *que son paralelos á él.*

Porque siendo DE *perpendicular al plano* AMB, *lo es tambien á todas las rectas* CA, CM, CB, &c., tiradas en este plano al pie de ella: luego todos los arcos DA, DM, DB, &c., son quartos de circunferencia; lo mismo sucede con los arcos EA, EM, EB, &c.: luego los puntos D y E equidistan ambos de todos los de la circunferencia AMB, y por consiguiente son sus
* Def. 5. polos.*

En segundo lugar, el radio DC, perpendicular al plano AMB, lo es tambien á su paralelo FNG: luego
* Pr. 1. pasa por el centro O del círculo FNG*. Luego si tiramos las obliqüas DF, DN, DG, estas obliqüas equidistarán de la perpendicular DO, y serán iguales. Pero siendo iguales las cuerdas, los arcos lo son tambien: luego todos los arcos DF, DN, DG, &c., son iguales entre sí: luego los dos puntos D y E son los dos polos del círculo menor FNG.

Corolario I. Todo arco DM, tirado de un punto del arco del círculo máxîmo á su polo, es un quarto de circunferencia, ó lo que es todo uno, un *quadrante*; y este *quadrante* hace al mismo tiempo un ángulo recto con el arco AM. Porque siendo la línea DC, perpendicular al plano AMC, qualquiera plano DMC, que pa-
* 18. 5. sa por la línea DC, es perpendicular á AMC*: luego el ángulo AMD es recto.

II. Para hallar el polo de un arco dado AM, tírese el arco indefinido MD, perpendicular á AM, tómese MD igual á un *quadrante*, y el punto D será uno de los polos del arco AM; ó bien háganse pasar por los dos puntos A y M los arcos AM, MD perpendiculares á AM, el punto de contorno D de estos dos arcos será el polo que buscamos.

III. Recíprocamente, si la distancia del punto D á cada uno de los puntos A y M es igual á un quadrante, digo que el punto D será polo del arco AM, y que al mismo tiempo los ángulos DAM, AMD serán rectos.

Porque sea C el centro de la esfera, y tírense los radios CA, CD, CM. Ya que los ángulos ACD, MCD son rectos, la línea CD es perpendicular á las dos rectas CA, CM: luego es perpendicular á su plano: luego el punto D es polo de arco AM; y por consiguiente los ángulos DAM, AMD son rectos.

Escolio. Las propiedades de los polos permiten trazar en la superficie de la esfera arcos de círculo con igual facilidad que en una superficie plana. Vemos por exemplo, que haciendo girar el arco DF, ú otra línea qualquiera del mismo intervalo, al rededor del punto D, el extremo F trazará el círculo menor FNG; y si hacemos girar el quadrante DFA al rededor del punto D, el extremo A trazará el arco de círculo máxîmo AM.

Si hay necesidad de prolongar el arco AM, ó sino se dan los puntos A y M por donde debe pasar este arco, determinaremos desde luego el polo D por la interseccion de dos arcos trazados desde los puntos A y M, como centros, y con un intervalo igual al quadrante. El polo D una vez hallado, describiremos desde este punto, como centro, y con el mismo radio, el arco AM y su prolongacion.

Finalmente, si tratamos de baxar desde el punto P una perpendicular al arco dado AM, prolongaremos este arco hácia S, hasta que el intervalo PS sea igual á un quadrante; despues desde el polo S, y con el mismo radio trazaremos el arco PM, que será la perpendicular pedida.

•••

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

Todo plano, perpendicular en el extremo de un radio, es tangente á la esfera.

Fig. 226. Sea FAG un plano perpendicular en el extremo del radio OA.

Tómese un punto qualquiera M en este plano, y tírense OM y AM.

El ángulo OAM será recto, y así la distancia OM será mayor que OA. Luego el punto M no es de la esfera; y como lo mismo se verifica con otro punto qualquiera del plano FAG, síguese que este plano solo tiene comun el punto A con la superficie de la esfera:
* Def. 4. luego es tangente á dicha superficie. *

Escolio. Del mismo modo podemos hallar que dos esferas solo tienen un punto comun, y son por consiguiente *tangentes* una á otra, quando la distancia de sus centros es igual á la suma ó á la diferencia de sus radios; entónces los centros y el punto de contacto estan en línea recta.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

Fig. 226. *El ángulo* BAC, *que forman entre sí dos arcos de círculos máxîmos* AB, AC, *es igual al ángulo* FAG, *formado por las tangentes de estos arcos en el punto* A; *tiene tambien por medida el arco* DE, *descrito desde el punto* A, *como polo entre los lados* AB *y* AC *prolongados si es necesario.*

Porque la tangente AF, tirada en el plano del arco AB, es perpendicular al radio AO; la tangente AG, tirada en el plano del arco AC, es perpendicular al mismo radio AO. Luego el ángulo FAG es igual al de los planos OAB, OAC *, que es el de los arcos AB, AC, y que designamos por BAC. * 17. 5.

Del mismo modo, si el arco AD es igual á un quadrante, lo mismo que AE, las líneas OD, OE serán perpendiculares á AO, y así el ángulo DOE será igual al de los planos AOD, AOE: luego el arco DE es la medida del ángulo de dichos planos, ó la medida del ángulo BAC.

Corolario. Los ángulos de los triángulos esféricos pueden medirse por los arcos de los círculos máxîmos descritos desde sus vértices como polos, y comprehendidos entre sus lados: así es fácil hacer un ángulo igual á otro dado.

Escolio. El ángulo ACO es igual á su opuesto en el vértice BCN; uno ú otro es siempre un ángulo formado por los dos planos ACB, OCN. Fig. 238.

Vemos tambien que quando dos arcos se cortan, como ACB, OCN, los dos ángulos adyacentes ACO, OCB valen siempre juntos dos rectos.

PROPOSICION IX.

TEOREMA.

Dado el triángulo ABC, *si de los puntos* A, B, C, *como polos, trazamos los arcos* EF, FD, DE, *que forman el triángulo* DEF, *recíprocamente los tres puntos* D, E, F *serán los polos de los lados* BC, AC, AB. Fig. 227.

Porque siendo el punto A polo del arco EF, la distancia AE es un quadrante; siendo el punto C polo del arco DE, la distancia CE es igualmente un quadrante: luego el punto E dista un quadrante de cada uno de los puntos A y C: luego es polo del arco AC *. * Pr. 6. Cor. 3.
Se demostrará tambien que D es polo del arco BC, y F de AB.

Corolario. Luego el triángulo ABC puede trazarse por medio de DEF, como DEF por medio de ABC.

PROPOSICION X.

TEOREMA.

Fig. 227. *Sentadas las mismas cosas que en el teorema anterior, cada ángulo de uno de los triángulos* ABC, DEF *tendrá por medida la semicircunferencia, ménos el lado opuesto en el otro triángulo.*

Prolónguense, si es necesario, los lados AB, AC hasta que encuentren á EF en G y H.

Ya que el punto A es polo del arco GH, el ángulo A tendrá por medida el arco GH. Pero el arco EH es un quadrante, lo mismo que GF, por ser E el polo de AH, y F el de AG: luego EH+GF vale una semicircunferencia. Pero EH+GF=EF+GH: luego el arco GH, que mide el ángulo A, es igual á una semicircunferencia ménos el lado EF; tambien el ángulo B tendrá por medida $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF, y el ángulo C, $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Esta propiedad debe ser recíproca en los dos triángulos, pues se trazan del mismo modo uno por medio de otro. Así hallaremos que los ángulos D, E, F, del triángulo DEF, tienen respectivamente por medida $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AC, $\frac{1}{2}$ *circ.* — AB. En efecto, el ángulo D, v. gr. tiene por medida el arco MI; pero MI+BC=MC+BI=$\frac{1}{2}$ *circ.*: luego el arco MI, medida del ángulo D, =$\frac{1}{2}$ *circ.* — BC, y así de los demas.

Fig. 228. *Escolio.* Es del caso observar que ademas del triángulo DEF, podriamos formar otros tres por medio de la interseccion de los tres arcos DE, EF, DF. Pero la proposicion actual solo se verifica en el triángulo central, que diferencia de los otros tres en que los dos án-

Fig. 227. gulos A y D estan situados á un mismo lado de CB,

los dos B y E á un mismo lado de AC, y los dos C y F á un mismo lado de AB.

Se dan varios nombres á los dos triángulos ABC, DEF; nosotros los llamaremos *triángulos polares*.

PROPOSICION XI.

LEMA.

Dado el triángulo ABC, *si desde el polo* A, *y con el intervalo* AC, *trazamos el arco de círculo menor* DEC, *si desde el polo* B, *y con el intervalo* BC *trazamos igualmente el arco* DFC, *y desde el punto* D, *en que se cortan los arcos* DEC, DFC, *describimos los arcos de círculos máxîmos* AD, DB: *digo que el triángulo* ADB, *formado de este modo, tendrá sus partes iguales á las del triángulo* ACB. Fig. 229.

Porque, por construccion, el lado AD=AC, DB =BC, AB es comun: luego estos dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales: digo ahora que los ángulos opuestos á los lados iguales son iguales.

En efecto, si suponemos en O el centro de la esfera, podemos concebir un ángulo sólido formado en este punto por los tres ángulos planos AOB, AOC, BOC; podemos concebir tambien otro segundo ángulo sólido formado por los tres ángulos planos AOB, AOD, BOD. Y una vez que los lados del triángulo ABC son iguales á los del triángulo ADB, síguese que los ángulos planos que forman uno de estos ángulos sólidos, son iguales á los ángulos planos que forman el otro ángulo sólido, cada uno al suyo; pero en este caso se ha demostrado * que los planos en que estan los ángulos iguales, estan igualmente inclinados entre sí: luego los ángulos del triángulo esférico DAB son iguales á los del triánguío CAB, esto es, DAB=BAC, DBA=ABC, y ADB=ACB: luego los dos triángulos ADB y ACB tienen sus lados respectivamente iguales. * 23. 5.

Escolio. La igualdad de estos triángulos no es una igualdad absoluta por superposicion, porque seria imposible sobreponer uno á otro exâctamente, á no ser que fuesen isósceles. La igualdad de que tratamos es la que hemos llamado anteriormente igualdad por *simetría*, y por esta razon llamaremos *triángulos simétricos* á los triángulos ACB, ADB.

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

Fig. 230. *Dos triángulos situados en una misma esfera, ó en esferas iguales, son iguales en todas sus partes, quando tienen un ángulo igual comprehendido entre lados respectivamente iguales.*

Sea el lado AB=EF, el lado AC=EG, el ángulo BAC=FEG.

El triángulo EFG podrá sobreponerse al triángulo ABC, ó á su simétrico ABD, del mismo modo que sobreponemos uno á otro dos triángulos rectilíneos que tienen igual un ángulo comprehendido entre lados iguales. Luego todas las partes del triángulo EFG serán iguales á las del triángulo ABC; esto es, que ademas de las tres partes supuestas, tendremos el lado BC=FG, el ángulo ABC=EFG, y el ángulo ACB=EGF.

PROPOSICION XIII.

TEOREMA.

Dos triángulos situados en una misma esfera, ó en esferas iguales, son iguales en todas sus partes, quando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales.

Porque podremos sobreponer uno á otro estos dos triángulos, como lo hemos explicado en el caso semejante de los triángulos rectilineos. *Véase prop. VII, lib. I.*

PROPOSICION XIV.

PROBLEMA.

Si dos triángulos situados en una misma esfera, ó en esferas iguales, son equiláteros entre sí, serán tambien equiángulos, y los ángulos iguales estarán opuestos á lados iguales.

Esto se comprehende evidentemente por la proposicion XI, donde hemos visto que con tres lados dados AB, AC, BC no se pueden formar mas que dos triángulos ACB, ABD, cuyas partes sean diferentes en situacion, pero iguales en magnitud. Luego dos triángulos equiláteros entre sí son, ó absolutamente iguales, ó á lo menos iguales por simetría: en ambos casos son equiángulos, y los ángulos iguales estan opuestos á lados iguales. Fig. 229.

PROPOSICION XV.

TEOREMA.

En todo triángulo esférico isósceles los ángulos opuestos á lados iguales son iguales; y recíprocamente, si dos ángulos de un triángulo esférico son iguales, el triángulo será isósceles.

1.° Sea el lado $AB = AC$; digo que será el ángulo $C = B$. Fig. 231.

Porque si desde el vértice A tiramos al punto D, medio de la base, el arco AD, los dos triángulos ABD, ADC tendrán sus tres lados respectivamente iguales; esto es, AD comun, $BD = DC$, y $AB = AC$: luego, segun el teorema anterior; estos triángulos tendrán los ángulos iguales, y será B=C.

2.° Sea el ángulo B=C: digo que tendremos AC=AB.

Porque si el lado AB no es igual á AC, sea AB el mayor de los dos. Tómese BO=AC, y tírese OC.

Los dos lados BO, BC son iguales á AC, BC; el ángulo OBC; comprehendido por los primeros, es igual al ángulo ACB, comprehendido por los segundos. Luego los dos triángulos BOC, ACB tienen las demas par-
* Pr. 12. tes iguales *, y tenemos el ángulo OCB=ABC; pero, por hipótesis el ángulo ABC=ACB: luego seria OCB=ACB, lo que es imposible: luego es absurdo el supuesto de ser AB desigual á AC: luego los lados AB y AC, opuestos á los ángulos iguales B y C, son iguales.

Escolio. La misma demostracion prueba que el ángulo BAD=DAC, y que el ángulo BDA=ADC: luego estos dos últimos son rectos. Luego *el arco tirado desde el vértice de un triángulo isósceles á la base es perpendicular á ella, y divide al ángulo del vértice en dos partes iguales.*

PROPOSICION XVI.

TEORÉMA.

Fig. 232. *Si en un triángulo esférico* ABC *el ángulo* A *es mayor que el ángulo* B, *el lado* BC, *opuesto al ángulo* A *será mayor que el lado* AC, *opuesto al ángulo* B; *recíprocamente, si el lado* BC *es mayor que* AC, *el ángulo* A *será mayor que el ángulo* B.

1.° Sea el ángulo A>B.

Hágase el ángulo BAD=B.

* Pr. 15. Tendremos AD=DB *; pero AD+DC es mayor que AC: luego, substituyendo DB por AD, tendremos DB+DC ó BC>AC.

2.° Si suponemos BC > AC, digo que el ángulo BAC será mayor que ABC.

Porque, si BAC fuese igual á ABC, tendríamos BC = AC; y si fuese BAC < ABC, se seguiria de lo que acabamos de demostrar que BC < AC, lo que repugna con lo supuesto. Luego el ángulo BAC es mayor que ABC.

PROPOSICION XVII.

TEOREMA.

Si los dos lados AB, AC *del triángulo esférico* ABC *son iguales á los otros dos* DE, DF *del triángulo* DEF *trazado en una esfera igual, y si al mismo tiempo el ángulo* A *es mayor que el ángulo* D: *digo que el tercer lado* BC *del primer triángulo será mayor que el tercero* EF *del segundo.* Fig. 223.

La demostracion es absolutamente semejante á la de la prop. x, lib. I.

PROPOSICION XVIII.

TEOREMA.

Si dos triángulos trazados en una misma esfera, ó en esferas iguales, son equiángulos entre sí, serán tambien equiláteros.

Sean A y B los dos triángulos dados, y Q sus triángulos polares.

Ya que los triángulos A y B tienen sus ángulos iguales, los polares P y Q tendrán iguales los lados *; * Pr. 10.
pero siendo los triángulos P y Q equiláteros entre sí, síguese * que tambien son equiángulos; finalmente, de * Pr. 14.
ser iguales los ángulos en los triángulos P y Q, deducimos * que serán iguales los lados en los polares A y B. * Pr. 10.
Luego los triángulos A y B son tambien equiláteros.

...

Podemos demostrar tambien esta proposicion sin el socorro de los triángulos polares.

Fig. 234. Sean ABC, DEF dos triángulos equiángulos entre sí, de modo que sea A = D, B = E, C = F: digo que tendremos el lado AB = DE, AC = DF, BC = EF.

Sobre la prolongacion de los lados AB, AC, tómese AG = DE, y AH = DF. Tírese GH, y prolónguense los arcos BC, GH hasta que se encuentren en I y K.

Los dos lados AG, AH son por construccion iguales á los otros dos DE, DF; el ángulo comprehendido
* Pr. 12. GAH = BAC = EDF: luego * los triángulos AGH, DEF son iguales en todas sus partes, y tenemos el ángulo AGH = DEF = ABC, y el ángulo AHG = DFE = ACB.

En los triángulos IBG, KBG, el lado BG es comun, el ángulo IGB = GBK; y una vez que IGB + BGK vale dos rectos, lo mismo que GBK + IBG, síguese que BGK =
* Pr. 13. IBG. Luego los triángulos IBG, GBK son iguales *, y tenemos IG = BK, y GK = IB.

Igualmente, por ser el ángulo AHG = ACB, deduciremos que los triángulos ICH, HCK tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales: luego son iguales, y por consiguiente IH = CK, y HK = IC.

Ahora, si de las cantidades iguales BK, IG restamos las iguales CK, IH, los residuos BC, GH serán iguales. Ademas, el ángulo BCA = AHG, y el ángulo ABC = AGH. Luego los triángulos ABC, AHG tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales: luego son iguales. Pero el triángulo DEF es igual en todas sus partes al triángulo AHG, luego lo es tambien al triángulo ABC, y tendremos AB = DE, AC = DF, BC = EF: luego si dos triángulos esféricos son equiángulos entre sí, los lados opuestos á los ángulos iguales son iguales.

Escolio. Esta proposicion no se verifica en los triángulos rectilíneos, en los quales de la igualdad de los ángulos solo podemos inferir la proporcionalidad de los lados. Pero es fácil conocer la diferencia que hay en esto entre los triángulos rectilíneos y los esféricos. En la proposicion actual, igualmente que en las XII, XIII, XIV XVII, donde hemos tratado de la comparacion de los triángulos, se ha dicho expresamente que estos triángulos estan trazados en una misma esfera ó en esferas iguales. Pero los arcos semejantes son proporcionales á los radios: luego, en esferas iguales, no pueden dos triángulos ser semejantes sin ser iguales. No es pues de admirar que á la igualdad de los ángulos sea consiguiente la igualdad de los lados.

No sucederia así si los triángulos estuviesen trazados en esferas desiguales; en tal caso, siendo iguales los ángulos, los triángulos serian semejantes, y los lados homólogos estarian en razon de los radios de las esferas.

PROPOSICION XIX.

TEOREMA.

La suma de los ángulos de qualquier triángulo esférico es menor que seis rectos, y mayor que dos.

Porque 1.° cada ángulo de un triángulo esférico es menor que dos rectos (*véase el escolio siguiente*): luego la suma de los tres ángulos es menor que seis rectos.

2.° La medida de cada ángulo de un triángulo esférico es igual á la semicircunferencia ménos el lado correspondiente del triángulo polar *: luego la suma de los * Pr. 10.
tres ángulos tiene por medida tres semicircunferencias ménos la suma de los lados del triángulo polar. Pero esta última suma es menor que una circunferencia *: lue- * Pr. 4.
go, restándola de tres semicircunferencias, el residuo será mayor que una semicircunferencia, que es el valor de dos ángulos rectos: luego 2.° la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos.

Corolario I. La suma de los ángulos de un triángulo esférico no es constante como la de los triángulos rectilíneos; varía desde dos ángulos rectos hasta seis, sin poder igualar ninguno de los dos límites. Así es que, aunque conozcamos dos ángulos, no podemos hallar el valor del tercero.

Corolario II. Un triángulo esférico puede tener dos ó tres ángulos rectos, y dos ó tres ángulos obtusos.

Fig. 235. Si el triángulo ABC es *bi-rectángulo*, esto es, si tiene dos ángulos rectos B y C, el vértice A será el polo de la base BC *; y los lados AB, AC serán quadrantes.

* Pr. 6.

Si tambien el ángulo A es recto, el triángulo ABC será *tri-rectángulo*, sus ángulos serán todos rectos, y sus lados quadrantes. El triángulo tri-rectángulo, cabe ocho veces en la superficie de la esfera, como se ve en la figura 236, suponiendo el arco MN igual á un quadrante.

Escolio. En todo lo que hemos dicho se ha supuesto, segun la definicion VI, que los lados de los triángulos esféricos son siempre menores que la semicircunferencia; y en este caso, es consiguiente que los ángulos son siempre menores que dos rectos. Porque si el lado AB es menor que la semicircunferencia, lo mismo que AC, estos dos arcos deben prolongarse para encontrarse en D. Pero los dos ángulos ABC, CBD valen juntos dos ángulos rectos: luego el ángulo ABC solo es menor que dos rectos.

Fig. 224.

Adviértase sin embargo que hay triángulos esféricos en los quales ciertos lados son mayores que la semicircunferencia, y ciertos ángulos mayores que dos rectos. Porque, si prolongamos el lado AC en una circunferencia entera ACE, quitando de la semiesfera el triángulo ABC, el residuo, es un nuevo triángulo, que podemos señalar tambien por ABC, y cuyos lados son AB, BC, AEC. Vemos pues que el lado AEC es mayor que la semicircunferencia AED; pero al mismo tiempo el ángulo opuesto en B excede á dos rectos en la cantidad CBD.

Por lo demas, si hemos excluido de la definicion los triángulos cuyos lados y ángulos son tan grandes, es porque su resolucion ó la determinacion de sus partes se reduce siempre á la de los triángulos expresados en la definicion. En efecto, se echa de ver que si conocemos los ângulos y lados del triángulo ABC, se conocerán sobre la marcha los ángulos y lados del triángulo que es el resto de la semiesfera.

PROPOSICION XX.

TEOREMA.

El uso AMBNA *es á la superficie de la esfera como el ángulo* MAN *de este uso es á quatro ángulos rectos, ó como el arco* MN*, que mide este ángulo, es á la circunferencia.* Fig. 236.

Supongamos que el arco MN esté con la circunferencia en una razon comensurable, por exemplo en la de 5 á 48; dividiremos la circunferencia MNPQ en 48 partes iguales; 5 de las quales contendrá MN; tirando luego por el polo A, y los puntos de division otros tantos quartos de circunferencia, tendremos 48 triángulos en la semiesfera AMNPQ, que serán todos iguales entre sí, pues tendrán iguales todas sus partes. Luego la esfera entera tendrá 96 de estos triángulos parciales, y el uso AMBNA contendrá 10: luego el uso es â la esfera como 10 á 96, ó como 5 á 48, esto es, como el arco MN á la circunferencia.

Si el arco MN no es comensurable con la circunferencia, probariamos por el mismo raciocinio, de que hemos visto ya muchos exemplos, que el uso es siempre á la esfera como el arco MN es á la circunferencia.

Corolario I. Dos usos estan entre sí como sus ángulos respectivos.

Corolario II. Ya hemos visto que la superficie total de la esfera es igual á ocho triángulos tri-rectángulos *: * Pr. 19. luego, si tomamos el area de uno de estos triangulos por unidad de medida, la superficie de la esfera estará representada por 8. Esto sentado, la superficie del uso cuyo ângulo es A, se expresará por 2A (siempre que se haya valuado el ángulo A tomando el ángulo recto por unidad); porque tenemos 2A: 8:: A: 4. Hay pues aquí dos unidades distintas; una para los ángulos, y es el ángulo recto; otra para las superficies, y es el triángulo esférico tri-rectángolo, ó el que tiene todos sus ángulos rectos, y sus lados son quartos de circunferencia.

Escolio. La esquina esférica comprehendida por los planos AMB, ANB es al sólido entero de la esfera como el ángulo A es á quatro ángulos rectos. Porque siendo iguales los usos, las esquinas esféricas lo serán tambien: luego dos esquinas esféricas están entre sí como los ángulos formados por los planos que los comprehenden.

PROPOSICION XXI.

TEOREMA.

Dos triángulos esféricos simétricos son iguales en superficie.

Fig. 237. Sean ABC, DEF dos triángulos simétricos, esto es, dos triángulos que tienen sus lados iguales, AB = DE, AC = DF, BC = EF; peró que sin embargo, no podrian sobreponerse: digo que la superficie ABC es igual á la superficie DEF.

Sea P el polo del círculo menor que pasaria por los tres puntos A, B, C (1).

* Pr. 6. Tírense desde este punto los arcos iguales* PA, PB, PC; en el punto F hágase el ángulo DFQ = ACP, el arco FQ = CP, y tírense DQ, EQ.

Los lados DF, FQ son iguales á AC, CP, el án-

(1) El círculo que pasa por los tres puntos A, B, C, ó que está circunscrito al triángulo ABC, no puede ser mas que un cirlo menor de la esfera; porque si fuese un círculo máxîmo, los tres lados AB, BC, AC estarian en un mismo plano, y el triángulo ABC se reduciria á uno de sus lados.

gulo DFQ = ACP : luego los dos triángulos DFQ y ACP son iguales en todas sus partes*: luego el lado DQ= AP, y el ángulo DQF = APC. * Pr. 12.

En los triángulos propuestos DFE, ABC los ángulos DFE y ACB, opuestos á los lados iguales DE y AB, son iguales*; si quitamos los ángulos DFQ, ACP, iguales por construccion, quedará el ángulo QFE = PCB: ademas, los lados QF y FE son iguales á PC y CB: luego los dos triángulos FQE, CPB son iguales en todas sus partes, y por consiguiente el lado QE=PB, y el ángulo FQE = CPB. * Pr. 11.

Si observamos ahora que los triángulos DFQ, ACP, que tienen sus lados respectivamente iguales, son al mismo tiempo isósceles, veremos que pueden sobreponerse uno á otro. Porque, sobreponiendo PA á su igual QF, el lado PC caerá sobre su igual QD, y así los dos triángulos quedarán confundidos en uno solo: luego son iguales, y la superficie DQF = APC. Por una razon semejante, la superficie FQE = CPB, y la superficie DQE = APB: luego tenemos DQF + FQE — DQE = APC + CPB — APB, ó DFE = ABC: luego los dos triángulos simétricos ABC, DEF son iguales en superficie.

Escolio. Los polos P y Q podrian estar dentro de los triángulos ABC, DEF; entónces tendriamos que sumar los tres triángulos DQF, FQE, DQE para componer el triángulo DEF; y del mismo modo, seria preciso sumar los tres triángulos APC, CPB, APB para componer el triángulo ABC; por lo demas, la demostracion y la conclusion serian siempre las mismas.

PROPOSICION XXII.

TEOREMA.

Si dos círculos máxîmos AOB, COD *se cortan arbitrariamente en el hemisferio* AOCBD, *la suma de los trián-* Fig. 238.

gulos opuestos AOC, BOD *será igual al uso cuyo ángulo es* BOD.

Porque, prolongando los arcos OB, OD en el otro hemisferio hasta que se encuentren en N, OBN será una semicircunferencia, lo mismo que AOB; quitando de ambas partes OB, tendrémos BN = AO. Por una razon semejante es DN = CO, y BD = AC: luego los dos triángulos AOC, BDN tienen los tres lados iguales. Ademas, por su posicion son simétricos uno á otro: luego son iguales en superficie*, y la suma de los triángulos AOC, BOD es equivalente al uso OBNDO, cuyo ángulo es BOD.

* Pr. 21.

Escolio. Se echa de ver tambien que las dos pirámides esféricas, cuyas bases son los triángulos AOC, BOD, equivalen juntas á la esquina esférica, cuyo ángulo es BOD.

PROPOSICION XXIII.

TEOREMA.

La superficie de un triángulo esférico qualquiera es la diferencia que va del valor de sus tres ángulos á dos ángulos rectos.

Fig. 239. Sea ABC el triángulo propuesto.

Prolónguense sus lados hasta que encuentren al círculo máximo DEFG, tirado arbitrariamente fuera del triángulo.

Segun el teorema anterior, los dos triángulos ADE, AGH equivalen juntos al uso, cuyo ángulo es A, y que tiene por medida 2A*; así tendremos ADE + AGH = 2A; por una razon semejante, BGF + BID = 2B, CHI + CFE = 2C. Pero la suma de estos seis triángulos excede á la semiesfera en dos veces el triángulo ABC, y el valor de la semiesfera es 4: luego el duplo del triángulo ABC es igual á 2A + 2B + 2C — 4, y por consiguiente ABC = A + B + C — 2: luego un triángulo

* Pr. 20.

esférico tiene por medida la suma de sus ángulos ménos dos rectos.

Corolario I. Segun sea el número de ángulos rectos que haya en esta medida, así habrá en el triángulo propuesto triángulos tri-rectángulos, ú octavas partes de esfera que son la unidad de superficie*. Por exemplo, si cada uno de los ángulos vale $\frac{4}{3}$ de un recto, los tres ángulos valdrán entónces 4 ángulos rectos, y el triángulo propuesto estará representado por $4-2$ ó 2: luego será igual á dos triángulos tri-rectángulos, ó á la quarta parte de la superficie de la esfera. * Pr. 20.

Corolario II. El triángulo esférico ABC es equivalente al uso, cuyo ángulo es $\frac{A+B+C}{2}-1$; del mismo modo, la pirámide esférica, cuya base es ABC, equivale la esquina esferica, cuyo ángulo es $\frac{A+B+C}{2}-1$.

Escolio. Al tiempo que se compara el triángulo esférico ABC con el triángulo tri-rectángulo, la pirámide esférica, que tiene por base ABC, se compara con la pirámide tri-rectángula, y resulta la misma proporcion. El ángulo sólido del vértice de la pirámide se compara tambien con el ángulo sólido del vértice de la pirámide tri-rectángula; en efecto, la comparacion se establece por la coincidencia de las partes. Pero, coincidiendo las bases de las pirámides, es evidente que tambien las pirámides coincidirán igualmente que los ángulos de su vértice. De aquí resultan muchas conseqüencias.

1.ª Dos pirámides triangulares esféricas estan entre sí como sus bases; y, puesto que una pirámide polígona puede dividirse en muchas pirámides triangulares, síguese que dos pirámides esféricas qualesquiera estan entre sí como los polígonos que les sirven de bases.

2.ª Los ángulos sólidos del vértice de las mismas pirámides están igualmente en la proporcion de las bases: luego, para comparar dos ángulos sólidos qualesquiera, es preciso colocar sus vértices en el centro de

...

dos esferas iguales, y estos ángulos sólidos estan entre sí como los polígonos esféricos interceptados entre sus planos ó caras.

El ángulo del vértice de la pirámide tri-rectángula está formado por tres planos perpendiculares entre sí; este ángulo, que podemos llamar *ángulo sólido recto*, es muy á propósito para servir de unidad de medida á los demas ángulos sólidos. Esto sentado, el mismo número que expresa el área del polígono esférico, expresará la medida del ángulo sólido correspondiente. Por exemplo, si el área del polígono esférico es $\frac{3}{4}$, esto es, si es los $\frac{3}{4}$ del triángulo tri-rectángulo, el ángulo sólido correspondiente será tambien $\frac{3}{4}$ del ángulo sólido recto.

PROPOSICION XXIV.

TEOREMA.

Fig. 240. *La superficie de un polígono esférico tiene por medida la suma de sus ángulos, ménos el producto de dos ángulos rectos por el número de los lados del polígono ménos dos.*

Desde un mismo vértice A tírense á todos los demas las diagonales AC, AD.

El polígono ABCDE quedará dividido en tantos triángulos ménos dos como lados tiene. Pero la superficie de cada triángulo es la suma de sus ángulos ménos dos rectos, y es evidente que la suma de todos los ángulos de los triángulos es igual á la suma de los ángulos del polígono: luego la superficie del polígono es igual á la suma de sus ángulos ménos tantas veces dos rectos como lados tiene ménos dos.

Escolio. Sea s la suma de los ángulos de un polígono esférico, n el número de sus lados, suponiendo el ángulo recto $= 1$, la superficie del polígono tendrá por medida $s - 2(n-2)$, ó $s - 2n + 4$.

PROPOSICION XXV.

TEOREMA.

Sea S *el número de ángulos sólidos de un poliedro*, H *el número de sus caras*, A *el de sus aristas: digo que tendremos siempre* $S + H = A + 2$.

Tómese dentro del poliedro un punto, desde el qual tirarémos líneas rectas â los vértices de todos sus ángulos. Imaginemos despues trazada desde el mismo punto, como centro, una superficie esférica, que esté cortada por todas estas líneas en otros tantos puntos. Unanse estos puntos con arcos de círculos máxîmos de modo que formen en la superficie de la esfera polígonos correspondientes é iguales en número á las caras del poliedro.

Sea ABCDE uno de estos polígonos, y sea n el número de sus lados; su superficie será $s - 2n + 4$, siendo s la suma de los ángulos A, B, C, D, E. Si valuamos de este modo la superficie de cada uno de los demas polígonos esféricos, y los sumamos todos juntos, deducirémos que la suma, ó la superficie de la esfera representada por 8, es igual â la suma de todos los ángulos de los polígonos ménos el duplo del número de sus lados mas 4, tomado tantas veces quantas caras hay. Pero como todos los ángulos formados en un mismo punto A valen quatro rectos, la suma de todos los ángulos de los polígonos es igual á 4 tomado tantas veces quantos ángulos sólidos hay: luego es igual á 4S. Ademas el duplo del número de los lados AB, BC, CD, &c. es igual al quadruplo del número de las aristas, ó $= 4A$, pues la misma arista sirve de lado â dos caras: luego tendremos $8 = 4S - 4A + 4H$; ó, sacando la quarta parte de ambos miembros, $2 = S - A + H$: luego $S + H = A + 2$. Fig. 240.

Corolario. Síguese de aquí que *la suma de los ángulos planos, que forman los ángulos sólidos de un poliedro, es igual á tantas veces quatro ángulos rectos como unidades* *hay en* S — 2, *siendo* S *el número de ángulos sólidos del poliedro.*

Porque, si consideramos una cara cuyo número de lados es n, la suma de sus ángulos será $2n - 4$ ángulos
* 21. 1. rectos*. Pero la suma de todos los $2n$, ó el duplo del número de los lados de todas las caras, $= 4A$, y 4 tomado tantas veces como caras hay $= 4H$: luego la suma de los ángulos de todas las caras $= 4A - 4H$. Pero, segun el teorema que acabamos de demostrar, tenemos $A - H = S - 2$, y por consiguiente $4A - 4H = 4(S-2)$: luego *la suma de los ángulos planos*, &c.

PROPOSICION XXVI.

TEOREMA.

Lám. 13. Fig. 15. *Entre todos los triángulos esféricos formados con dos lados dados* CB *y* CA, *y un tercero arbitrario, aquel es mayor* ABC, *cuyo ángulo* C, *comprehendido por los lados dados, es igual á la suma de los otros dos ángulos* A *y* B.

Prolónguense los dos lados AC, AB hasta que se encuentren en D.

Tendremos un triángulo esférico BCD, en el qual el ángulo DBC será tambien igual á la suma de los otros dos BDC, BCD; porque siendo BCD + BCA iguales á dos rectos, lo mismo que CBA + CBD, tenemos BCD + BCA = CBA + CBD. Añadiendo á ambas partes BDC = BAC, tendremos BCD + BCA + BDC = CBA + CBD + BAC. Pero, por suposicion, BCA = CBA + BAC: luego CBD = BCD + BDC.

Tírese BI que haga el ángulo CBI = BCD, y por consiguiente IBD = BDC. Los dos triángulos IBC, IBD serán isósceles, y tendremos IC = IB = ID. Luego el punto I, medio de BC, equidista de los tres puntos B, C, D; por una razon semejante, el punto O, medio de AB, equidistará de los tres puntos A, B, C.

Sea ahora $CA' = CA$, y el ángulo $BCA' > BCA$. Si tiramos $A'B$, y prolongamos los arcos $A'C$, $A'B$ hasta que se encuentren en D', el arco $D'CA'$ será una semicircunferencia lo mismo que DCA: luego, una vez que $CA'=CA$, tendremos tambien $CD'=CD$. Pero en el triángulo CID', tenemos $CI + ID' > CD'$: luego $ID' > CD' - CI$, ó $ID' > ID$.

En el triángulo isósceles CIB, divídase el ángulo del vértice en dos partes iguales con el arco EIF, que será perpendicular en el medio de BC. Si tomamos un punto L entre I y E, la distancia BL, igual á LC, será menor que BI; porque se puede demostrar, como en la prop. XIX, lib. I, que $BL + LC < BI + IC$: luego tomando la mitad de ambas partes tendremos $BL < BI$. Pero en el triángulo $D'LC$ tenemos $D'L > D'C - CL$, y con mayor razon $D'L > DC - CI$, ó $D'L > DI$, ó $DL > BI$, ó $D'L > BL$. Luego si buscamos en el arco EIF un punto que equidiste de los tres B, C, D', este punto deberia estar precisamente en la prolongacion de EI hácia F. Sea I' el punto buscado, de modo que tengamos $D'I' = BI' = CI'$. Los triángulos $I'CB'$, $I'CD'$, $I'BD'$ son isósceles, y por consiguiente tienen sus ángulos iguales. $I'BC = I'CB$, $I'BD' = I'D'B$, $I'CD' = I'D'C$. Pero los ángulos $D'BC + CBA'$ valen dos rectos, lo mismo que $D'CB + BCA$ luego

$$D'BI + I'BC + CBA' = 2,$$
$$BCI' - I'CD' + BCA' = 2.$$

Sumando estas dos equaciones, y observando que $I'BC = BCI'$, y $D'BI' - I'CD' = BD'I' - I'D'C = CD'B = CA'B$, tendremos $2I'BC + CA'B + CBA' + BCA' = 4$.

Luego $CA'B + CBA' + BCA' - 2$ (medida del area del triángulo $A'BC$) $= 2 - 2I'BC$; de modo que tenemos *área* $A'BC = 2 - 2$ *ángulo* $I'BC$; del mismo modo en el triángulo ABC, tendriamos *área* $ABC = 2 - 2$ *ángulo* IBC. Pero se ha demostrado que el ángulo $I'BC$ es mayor que IBC: luego el área $A'BC$ es menor que ABC.

La misma demostracion y conclusion se verificarian, Lám. 13. Fig. 15.

si, tomando siempre el arco $CA' = CA$, hiciesemos el ángulo $BCA' < BCA$: luego ABC es el triángulo mayor entre todos los que tienen dos lados dados y el tercero arbitrario.

Fig. 241. *Escolio* I. El triángulo ABC, el mayor entre todos los que tienen dos lados dados CA, CB, puede inscribirse en un semicírculo, cuya cuerda del tercer lado AB será el diámetro; porque siendo O el medio de AB, hemos visto que las distancias OC, OB son iguales: luego la circunferencia del círculo menor, descrita desde el punto O, como polo, y con el intervalo OB, pasará por los tres puntos A, B, C. Ademas, la línea recta BA es un diámetro del círculo menor; porque el centro, que debe estar al mismo tiempo en el plano del círculo menor y en el del arco del círculo máxîmo * BOA, estará indispensablemente en la interseccion de estos dos planos, que es la recta BA, y así BA será un diámetro.

* Pr. 1. Cor. 4.

II. En el triángulo ABC, siendo el ángulo C igual á la suma de los otros dos A y B, síguese que la suma de estos tres ángulos es dupla del ángulo C. Pero esta suma es siempre mayor que dos rectos *: luego el ángulo C es mayor que un recto.

* Pr. 19.

III. Si prolongamos los lados CB, CA hasta que se encuentren en E, el triángulo BAE será igual á la quarta parte de la superficie de la esfera. Porque el ángulo $E = C = ABC + CAB$: luego los tres ángulos del triángulo BAE equivalen á los quatro ABC, ABE, CAB, BAE, cuya suma vale quatro rectos: luego la superficie del triángulo BAE * $= 4 - 2 = 2$, que es la quarta parte de la superficie de la esfera.

* Pr. 25.

IV. No se verificaria que fuese el *máxîmo* si la suma de los dos lados dados CA, CB fuese igual ó mayor que la semicircunferencia de un círculo máxîmo. Porque ya que el triángulo ABC debe estar inscrito en un semicírculo de la esfera, es preciso que la suma de los dos lados CA, CB sea menor que la semicircunferencia de un círculo de la esfera, y por consiguiente menor que la semicircunferencia de un círculo máxîmo.

La razon de no haber *máxîmo* quando la suma de los dos lados dados es mayor que la semicircunferencia de un círculo máxîmo, es porque entónces el triángulo aumenta cada vez mas á medida que es mayor el ángulo comprehendido por los lados dados. Finalmente, quando este ángulo sea igual á dos rectos, los tres lados estarán en un mismo plano, y formarán una circunferencia entera; el triángulo esférico será pues igual á la semiesfera, pero dexará entónces de ser triángulo.

PROPOSICION XXVII.

TEOREMA.

De todos los triángulos esféricos formados con un lado y perímetro dados, aquel es mayor que tiene iguales sus dos lados arbitrarios. Fig. 242.

Sea AB el lado dado comun á los dos triángulos ACB y ADB, y sea AC+CB=AD+DB: digo que el triángulo isósceles ACB, en el qual AC=CB, es mayor que el no—isósceles ADB.

Porque teniendo estos triángulos la parte comun AOB, basta demostrar que el triángulo BOD es menor que AOC. El ángulo CBA, igual á CAB, es mayor que OAB; así el lado AO es mayor que OB *; tómese OI =OB, hágase OK=OD, y tírese KI; el triángulo OKI será igual á DOB *. Si se niega ahora que el triángulo DOB, ó su igual KOI, es menor que OAC, será preciso que sea igual ó mayor. En ambos casos, ya que el punto I está entre A y O, el punto K deberá caer sobre la prolongacion de OC, porque á no ser así el triángulo OKI estaria dentro del triángulo CAO, y seria por consiguiente menor. Esto sentado, siendo CA la menor distancia de C á A, tenemos CK+KI+IA> CA. Pero CK=OD—CO, AI=AO—OB, KI=BD:

* Pr. 16.
* Pr. 12.

luego $OD - CO + AO - OB + BD > CA$, y reduciendo, $AD - CB + BD > CA$, ó $AD + BD > AC + CB$. Pero esta desigualdad repugna con la suposicion $AD + BD = AC + CB$: luego el punto K no puede caer sobre la prolongacion de OC, luego cae entre O y C, y por consiguiente el triángulo KOI, ó su igual ODB, es menor que ACO: luego el triángulo isósceles ACB es mayor que ADB de la misma base y perímetro, pero que no es isósceles.

Escolio. Estas últimas proposiciones son análogas á I y III del apéndice del libro IV; así podemos sacar respecto á los polígonos esféricos las conseqüencias que se verifican en los rectilíneos. Las principales son:

1.° *De todos los polígonos esféricos isoperímetros y de un mismo número de lados, el equilátero es el mayor.*

2.° *De todos los polígonos esféricos formados con lados dados y uno arbitrario, el mayor es el que puede inscribirse en un semicírculo, cuyo diámetro sea la cuerda del lado no determinado.* Para que sea posible la resolucion, es preciso que la suma de los lados dados sea menor que una semicircunferencia de círculo máxîmo.

3.° *Entre los polígonos esféricos formados con lados dados, el mayor es el que puede inscribirse en un círculo de la esfera.*

4.° *El mayor polígono esférico entre los que tienen un mismo perímetro é igual número de lados, es el que tiene sus lados y ángulos iguales.*

Todas las proposiciones de *máxîmo* pertenecientes â los polígonos esféricos se aplican á los ángulos sólidos de que estos polígonos son medida.

APÉNDICE Á LOS LIBROS VI y VII.

LOS POLIEDROS REGULARES.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

Solo hay cinco poliedros regulares.

Porque hemos dado la difinicion de *poliedros regulares* á aquellos, cuyas caras son poligonos regulares iguales, y cuyos ángulos sólidos son iguales entre sí. Estas condiciones solo pueden verificarse en un corto número de casos.

1.° Si las caras son triángulos equiláteros, podemos formar cada ángulo sólido del poliedro con tres, quatro ó cinco ángulos de estos triángulos; de aquí se originan tres cuerpos regulares, que son el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. No se pueden formar mas con triángulos equiláteros, porque seis ángulos de estos triángulos valen quatro rectos, y no pueden formar ángulo sólido. * * 21. 5.

2.° Si las caras son quadrados, podemos juntar sus ángulos de tres en tres, y resulta el cubo ó exâedro.

Quatro ángulos de quadrado valen quatro rectos, y no pueden formar ángulo solido.

3.° Finalmente, si las caras son pentágonos regulares, podremos tambien unir sus ângulos de tres en tres, y resultará el dodecaedro regular.

No se puede pasar adelante, porque tres ângulos de exâgonos regulares valen quatro rectos, y tres de optágonos mas todavia.

Luego solo puede haber cinco poliedros regulares, tres formados con triángulos equiláteros, uno con quadrados, y uno con pentágonos.

Escolio. Vamos â probar en la proposicion siguiente que estos cinco poliedros exîsten realmente, y que se pueden determinar todas sus dimensiones conociendo una de sus caras.

PROPOSICION II.

PROBLEMA.

Dada una de las caras de un poliedro regular, ó solo su lado, construir el poliedro.

Este problema nos presenta otros cinco que vamos á resolver sucesivamente.

Construccion del tetraedro.

Fig. 243. Sea ABC el triángulo equilátero, que debe ser una de las caras del tetraedro.

En el punto O, centro de este triángulo, levántese al plano ABC la perpendicular OS; termínese esta perpendicular en el punto S; de modo que $AS = AB$; tírense SB, SC, y la pirámide SABC sera el tetraedro que buscamos.

Porque, una vez que las distancias OA, OB, OC son iguales, las obliquas SA, SB, SC equidistan de la perpendicular SO, y son iguales. Una de ellas $SA = AB$: luego las quatro caras de la pirámide SABC son triángulos iguales al dado ABC. Ademas los ángulos sólidos de esta pirâmide son iguales entre sí, pues cada uno está formado por tres ángulos planos iguales: luego esta pirámide es un tetraedro regular.

Construccion del exâedro.

Sea ABCD un quadrado dado.

Sobre la base ABCD constrúyase un prisma recto, cuya altura AE sea igual al lado AB. Fig. 244.

Claro está que las caras del prisma son quadrados iguales, y que sus ángulos sólidos son iguales entre sí, como que estan formados cada uno por tres ángulos rectos: luego este prisma es un exâedro regular ó cubo.

Construccion del octaedro.

Sea AMB un triángulo equilátero dado. Fig. 245.

Sobre el lado AB trácese el quadrado ABCD en el punto O, centro de este quadrado, levântese á su plano la perpendicular TS, terminada por una y otra parte en T y S, de modo que OT = OS = AO; tírense luego SA, SB, TA, &c.; tendremos un sólido SABCDT compuesto de dos pirámides quadrangulares SABCD, TABCD, sobrepuestas una â otra por su base comun ABCD, y este sólido será el octaedro regular que pedimos.

En efecto, el triángulo AOS, es rectángulo en O, lo mismo que el triángulo AOD; los lados AO, OS, OD son iguales: luego los triángulos lo son tambien, y tenemos AS = AD. Del mismo modo se demostrará que todos los triángulos rectángulos AOT, BOS, COT, &c. son iguales al triángulo AOD: luego todos los lados AB, AS, AT, &c. son iguales entre sí, y por consiguiente el sólido SABCDT está formado por ocho triángulos iguales al equilátero dado ABM. Digo ademas que los ángulos sólidos del poliedro son iguales unos á otros, v. gr. el ángulo S = B.

Porque se echa de ver que los triángulos SAC y

DAC son iguales, y que por consiguiente el ángulo ASC es recto: luego la figura SATC es un quadrado igual â ABCD. Pero si comparamos la pirámide BASCT á la pirámide SABCD, la base ASCT de la primera puede sobreponerse á la base ABCD de la segunda; entónces siendo el punto O un centro comun, la altura OB de la primera coincidirá con la altura OS de la segunda, y las dos pirámides se confundirán en una sola: luego el ángulo sólido S es igual al ángulo sólido B: luego el sólido SABCDT es un octaedro regular.

Escolio. Si tres rectas iguales AC, BD, ST son perpendiculares entre sí y se cortan por mitad, sus extremos seran los vértices de un octaedro regular.

Construccion del dodecaedro.

Fig. 246. Sea ABCDE un pentágono regular dado; sean ABP, CBP dos ángulos planos iguales al ángulo ABC.

Con estos ángulos planos fórmese el ángulo sólido B, y determínese por la proposicion XXIV, lib. V, la mútua inclinacion de dos de estos planos, á la qual llamaré K. Fórmense del mismo modo en los puntos C, D, E, A ángulos sólidos iguales al ángulo sólido B, y situados semejantemente. El plano CBP será el mismo que BCG, pues ambos tienen una misma cantidad K de inclinacion sobre el plano ABCD. Luego podemos trazar en el plano PBCG el pentágono BCGFP igual al pentágono ABCDE. Si hacemos igual operacion en cada uno de los otros planos CDI, DEL, &c., tendremos una superficie convexâ PFGH, &c. compuesta de seis pentágonos regulares iguales, siendo una misma la cantidad de inclinacion K de cada uno sobre su adyacente. Sea *pfgh*, &c. otra superficie igual á PFGH, &c; digo que se pueden unir estas dos superficies de modo que no formen mas que una sola superficie convexâ continua. En efecto, el ángulo *opf*, por exemplo, puede formar, unido á los otros dos OPB, BPF, un ángulo sólido P igual á B; sin que en esta union se altere la inclinacion de los planos BPF, BPO, pues esta inclinacion es cabalmente la precisa para la formacion del ángulo sólido. Pero al mismo tiempo que se forma el ángulo sólido P, el lado *pf* se sobrepondrá á su igual PF, y en el punto F estarán reunidos tres ángulos planos PFG, *pfe*, *efg*, que formarán un ángulo sólido igual á cada uno de los ya formados. Esta union se verificará sin alterar el estado del ángulo P, ni el de la superficie *efgh*, &c; porque los planos PFG, *efp*, reunidos ya en P, tienen entre sí la inclinacion necesaria K, igualmente que los planos *efg*, *efp*. Continuando así sucesivamente vemos que las dos superficies se ajustarán mútuamente una con otra para no formar mas que una sola superficie contínua y reentrante en sí misma: esta superficie será la de un dodecaedro regular, pues estará compuesta de doce pentágonos regulares iguales, y todos sus ángulos sólidos son iguales entre sí.

Construccion del icosaedro.

Sea ABC una de sus caras. Es preciso desde luego formar un ángulo sólido con cinco planos iguales á ABC, y que cada uno esté igualmente inclinado sobre su adyacente. Para esto, sobre el lado B′C′, igual á BC, fórmese el pentágono regular B′C′H′I′D′; en el centro de dicho pentágono levántese á su plano una perpendicular, que terminará en A′, de modo que B′A′ = B′C′; tírense A′C′, A′H′, A′I′, A′D′, y el ángulo sólido A′, formado por los cinco planos B′A′C′, C′A′H′, &c., será el ángulo sólido que buscamos. Porque las obliquas A′B′, A′C′, &c. son iguales, y una de ellas A′B′ es igual al lado B′C′: luego todos los triángulos B′A′C′, C′A′H′, &c. son iguales entre sí y al dado ABC. Fig. 247.

Se echa de ver por otra parte que los planos B′A′C′, C′A′H, &c. están igualmente inclinados cada uno sobre su adyacente; porque los ángulos sólidos B′, y C′, &c, son iguales entre sí, por estar formados cada uno de ellos con dos ángulos de triángulos equiláteros, y uno de pentágono regular. Llamemos K la inclinacion de los dos planos en que están los ángulos, la qual podemos determinar por la proposicion XXIV, lib. V; el ángulo K será al mismo tiempo la inclinacion de cada uno de los planos que componen el ángulo sólido A′ sobre su adyacente.

Esto sentado, si en los puntos A, B, C formamos ángulos sólidos iguales á A′, tendremos una superficie convexâ DEFG, &c. compuesta de diez triángulos equiláteros, cada uno de los quales estará inclinado sobre su adyacente la cantidad K; y los ángulos D, E, F, &c. de su perímetro reunirán alternativamente tres y dos ángulos de triángulos equiláteros. Imaginemos otra superficie igual â DEFG, &c; estas dos superficies podrán adaptarse mútuamente, uniendo cada ángulo triple de la una con un ángulo duplo de la otra; y como los planos de estos ângulos tienen ya entre sí una inclinacion K necesaria para formar un ángulo sólido quintuplo igual al ángulo A, esta union no alterará en cosa alguna el estado de cada superficie en particular, y las dos juntas formarán una sola superficie continua compuesta de veinte triángulos equiláteros. Esta superficie será la del icosaedro regular, pues además todos los ángulos sólidos son iguales.

PROPOSICION III.

PROBLEMA.

Hallar la inclinacion de dos caras adyacentes de un poliedro regular.

Esta inclinacion se deduce inmediatamente de la construccion que acabamos de dar de los cinco poliedros regulares, á lo qual es preciso añadir la proposicion XXIV, libro v, por la qual, dados los tres ángulos planos que forman un ángulo sólido, se determina el ángulo que forman estos dos planos entre sí.

En el tetraedro. Cada ángulo sólido está formado por tres ángulos de triángulos equiláteros: luego es preciso buscar por el problema citado el ángulo que dos de estos planos forman entre sí, que será la inclinacion de dos caras adyacentes del tetraedro. Fig. 243.

En el exâedro. El ángulo de dos caras adyacentes es un ángulo recto. Fig. 244.

En el octaedro. Fórmese un ángulo sólido con dos ángulos de triángulos equiláteros y un ángulo recto; la inclinacion de los dos planos en que estan los ángulos de los triángulos será la de dos caras adyacentes del octaedro. Fig. 245.

En el dodecaedro. Cada ángulo sólido está formado con tres ángulos de pentágonos regulares; así la inclinacion de los planos de dos de estos ángulos será la de dos caras adyacentes del dodeçaedro. Fig. 246.

En el icosaedro. Fórmese un ángulo sólido con dos ángulos de triángulos equiláteros y uno de pentágono regular; la inclinacion de los dos planos en que estan los ángulos de los triángulos será la de dos caras adyacentes del icosaedro. Fig. 247.

PROPOSICION IV.

PROBLEMA.

Dado el lado de un poliedro regular, hallar el radio de la esfera inscrita y el de la esfera circunscrita al poliedro.

Es preciso demostrar primeramente que todo poliedro regular puede inscribirse y circunscribirse á la esfera.

Sea AB el lado comun á las dos caras adyacentes, sean C y E los centros de estas dos caras, y CD, ED las perpendiculares baxadas desde estos centros al lado comun AB, las quales caerian en el punto D, mitad de dicho lado. Fig. 248.

Las dos perpendiculares CD, DE forman entre sí un ángulo conocido, que es igual á la inclinacion de dos caras adyacentes determinada por el problema anterior. Si en el plano CDE, perpendicular á AB, tiramos sobre CD y ED las perpendiculares indefinidas CO y EO, que se encuentran en O: digo que el punto O será el centro de la esfera inscrita y el de la circunscrita, siendo el radio de la primera OC, y OA el de la segunda.

En efecto, ya que los apotemas CD, DE son iguales, y la hipotenusa DO comun, el triángulo rectángulo ODE*, y las perpendiculares OC y OE son iguales. Pero siendo AB perpendicular al plano CDE, el plano ABC es perpendicular á CDE*, ó CDE á ABC; por otra parte CO, en el plano CDE, es perpendicular á CD, comun interseccion de los planos CDE, ABC: luego CO* es perpendicular al plano ABC. Por la misma razon EO es perpendicular al plano ABE: luego las dos perpendiculares CO, EO, tiradas á los planos de dos caras adyacentes por los centros de dichas caras, se encuentran en un mismo punto O, y son iguales. Supongamos ahora que ABC y ABE representan otras dos caras adyacentes qualesquiera; el apotema CD permanecerá siempre de la misma magnitud, igualmente que el ángulo CDO, mitad de CDE: luego el triángulo rectángulo CDO y su lado CO serán iguales en todas las caras del poliedro: luego, si desde el punto O, como centro, y con el radio OC, trazamos una esfera, esta esfera pasará por todos los centros de las caras del poliedro (porque los planos ABC, ABE serán perpendiculares en el extremo del radio), y la esfera estará inscrita en el poliedro, ó el poliedro circunscrito á la esfera.

* 18. 1.

* 17, 5.

* 18, 5.

Tírense OA y OB; por ser CA = CB, las dos obliquas OA, OB, equidistando de la perpendicular, serán iguales; lo mismo se verificará con otras dos líneas qualesquiera, tiradas desde el centro O á los extremos de un mismo lado: luego todas estas líneas son iguales entre sí. Luego si desde el punto O, como centro, y con el radio OA, describimos una superficie esférica, dicha superficie pasará por los vértices de todos los ángulos sólidos del poliedro, y la esfera estará circunscrita al poliedro, ó el poliedro inscrito en la esfera.

Esto sentado, la resolucion del problema propuesto no presenta dificultad alguna, y puede verificarse así:

Dado el lado de una cara del poliedro, descríbase esta cara, y sea CD su apotema. Búsquese por el problema anterior la inclinacion de dos caras adyacentes del poliedro, y hágase el ángulo CDE igual á esta inclinacion. Tómese DE = CD; tírense CO y EO perpendiculares á CD y ED, las quales se encontrarán en un punto O, y CO será el radio de la esfera inscrita en el poliedro. Fig. 249.

Sobre la prolongacion de DC tómese CA igual al radio del círculo circunscrito á una cara del poliedro, y será OA el radio de la esfera circunscrita á este mismo poliedro.

Porque los triángulos rectángulos CDO, CAO de la figura 249, son iguales á los del mismo nombre en la figura 248, así CD y CA son los radios de los círculos inscritos y circunscritos á una cara del poliedro, miéntras que OC y OA lo son de las esferas inscrita y circunscrita á un mismo poliedro.

Escolio. De las proposiciones anteriores podemos deducir varias conseqüencias.

1.ª Todo poliedro regular puede dividirse en tantas pirámides regulares como caras tiene el poliedro; el vértice comun de estas pirámides será el centro de la esfera, que es al mismo tiempo el de las esferas inscrita y circunscrita.

2.ª La solidez de un poliedro regular es igual á su superficie multiplicada por el tercio del radio de la esfera inscrita.

3.ª Dos poliedros regulares del mismo nombre son dos sólidos semejantes, y sus dimensiones homólogas son proporcionales: luego los radios de las esferas inscritas ô circunscritas siguen la razon de los lados de estos poliedros.

4.ª Si inscribimos un poliedro regular en una esfera, los planos que esten desde el centro en la direccion de los diferentes lados, dividirán la superficie de la esfera en tantos polígonos iguales y semejantes como caras tiene el poliedro.

LIBRO VIII.

DE LOS CUERPOS REDONDOS.

DEFINICIONES.

I. Llamamos *cilindro* el sólido producido por la revolucion de un rectángulo ABCD, que inaginámos gira sobre el lado imóbil AB. Fig. 250.

En este movimiento, los lados AD, BC, que permanecen siempre perpendiculares á AB, describen planos circulares iguales DHP, CGQ, que llamamos las *bases del cilindro*, y el lado CD describe su *superficie convexâ*.

La línea imóbil AB se llama *exe del cilindro*.

Toda seccion KLM, hecha en el cilindro perpendicularmente al exe, es un círculo igual á cada una de las bases; porque miéntras el rectángulo ABCD gira al rededor de AB, la línea IK, perpendicular á AB, describe un plano circular igual á la base, el qual no es otra cosa que la seccion hecha perpendicularmenre al exe en el punto I.

Toda seccion PQGH, hecha en la direccion del exe, es un rectángulo duplo del rectángulo generador ABCD.

II. Dase el nombre de *cono* al sólido producido por la revolucion del triángulo rectángulo SAB, que imaginamos gira al rededor del lado imóbil SA. Fig. 251.

En este movimiento el lado AB describe un plano circular BDCE, que llamamos *la base del cono*, y la hipotenusa SB describe su *superficie convexâ.*

El punto S se llama *el vértice del cono*, SA *el exe* ó *la altura*, y SB *el lado* ó *apotema.*

Toda seccion HKFI, hecha perpendicularmente al exe, es un círculo; toda seccion SDE, hecha en la direccion del exe, es un triángulo isósceles duplo del triángulo generador SAB.

III. Si del cono SCDB quitamos, con una seccion paralela á la base, el cono SFKH, el sólido restante CBHF se llama *cono truncado* ó *tronco de cono.* Podemos suponer que está formado por la revolucion del trapecio ABHG, cuyos ángulos A y G son rectos, al rededor del lado AG. La línea imóbil AG se llama *el exe* ó *la altura del tronco*, los círculos BDC, HKF son *sus bases*, y BH *el lado.*

IV. Dos cilindros ó dos conos son *semejantes* quando sus exes están entre sí como los diámetros de sus bases.

Fig. 252. V. Si en el círculo ACD, que sirve de base á un cilindro, inscribimos un polígono ABCDE, y sobre la base ABCDE levantamos un prisma recto igual en altura al cilindro, se dice en tal caso que el *prisma* está *inscrito en el cilindro*; *ó el cilindro circunscrito al prisma.*

Claro está que siendo las aristas AF, BG, CH, &c. del prisma perpendiculares al plano de la base, estan comprehendidas en la superficie convexâ del cilindro: luego el prisma y el cilindro son tangentes en la direccion de sus aristas.

Fig. 253. VI. Del mismo modo, si ABCD es un polígono circunscrito á la base de un cilindro, y construimos sobre la base ABCD un prisma recto igual en altura al cilindro, decimos que el prisma está *circunscrito al cilindro*, ó el cilindro *inscrito en el prisma.*

Sean M, N, &c. los puntos de contacto de los lados AB, BC &c. y levántense en los puntos M, N, &c. las perpendiculares MX, NY, &c. al plano de la base. Se echa de ver que estas perpendiculares estarán al mismo tiempo en la superficie del cilindro y en la del prisma circunscrito: luego serán sus líneas de contacto.

N. B. El cilindro, el cono, y la esfera son los *tres cuerpos redondos* de que se trata en los elementos.

Lemas preliminares sobre las superficies.

I.

Una superficie plana OABCD *es menor que qualquiera otra superficie* PABCD, *terminada por el mismo contorno* ABCD. Fig. 213.

Esta proposicion es tan evidente que se puede colocar en el número de los axîomas; porque podemos suponer que el plano es entre las superficies lo que la línea recta entre las líneas: la línea recta es la mas corta entre dos puntos dados, igualmente el plano es la menor superficie entre todas las de un mismo perímetro. Sin embargo, como es muy del caso reducir el número de axîomas al menor posible, pondremos un raciocinio que no dexará duda alguna sobre esta proposicion.

Siendo una superficie una extension que consta de longitud y latitud, para que una superficie sea mayor que otra, es preciso que las dimensiones de la primera sean en algun sentido mayores que las de la segunda; y si sucede que las dimensiones de una superficie son en todos sentidos menores que las de otra superficie, es evidente que la primera superficie será la menor de las dos. Pero, sea qual fuere el sentido en que se haga pasar el plano BPD, que cortará á la superficie plana en la direccion BD, y á la otra superficie en la direccion BPD, la línea recta BD siempre será menor que BPD: luego la superficie OACED es menor que la superficie PABCD, que la rodea.

II.

Fig. 255. *Toda superficie* convexâ OABCD *es menor que qualquiera otra que rodease á la primera, descansando en el mismo perímetro* ABCD.

Repetirémos aquí que entendemos por *superficie convexâ* una superficie que solo puede estar cortada en dos puntos por una línea recta, y sin embargo es posible que una línea recta se aplique exâctamente en cierto sentido sobre una superficie convexâ, de lo qual vemos exemplos en las superficies del cono y del cilindro. Observarémos tambien que la denominacion de *superficie convexâ* no es solo para las superficies curbas, sino tambien comprehende las superficies *poliédricas* ó compuestas de muchos planos, y tambien las superficies en parte curvas y en parte poliedricas.

Esto sentado, si la superficie OABCD no es menor que todas las que la rodean, sea PABCD la menor entre estas, que será á lo mas igual á OABCD. Por un punto qualquiera O, hágase pasar un plano tangente á la superficie OABCD, el qual encontrará á la superficie PABCD, y la parte que corte de ella será mayor que el plano terminado en dicha superficie: luego, conservando lo restante de la superficie PABCD, podriamos substituir el plano á la parte rebaxada, y tendriamos una nueva superficie, que rodearia siempre á la superficie OABCD, y que seria menor que PABCD.

Pero esta es, por hipótesis, la menor de todas: luego esta suposicion seria falsa: luego la superficie convexâ OABCD es menor que qualquiera otra que la rodease, terminándose en el mismo perímetro ABCD.

Escolio. Por un raciocinio de todo punto semejante se probará.

Fig. 256. 1.° Que si una superficie convexâ terminada por dos contornos ABC, DEF está rodeada por otra superficie

qualquiera terminada en los mismos perímetros, la superficie rodeada será la menor.

2.° Que si una superficie convexâ AB está rodeada por todas partes por otra MN, ora tengan puntos, líneas ó planos comunes, ora no los tengan, la superficie rodeada será siempre menor que la superficie exterior. Fig. 257.

Porque entre estas no puede haber ninguna que sea la menor de todas, pues en todos casos podriamos tirar siempre el plano CD tangente á la superficie convexâ, cuyo plano seria menor que la superficie CMD; y así la superficie CND seria menor que MN, lo que repugna con el supuesto de ser MN la menor de todas. Luego la superficie convexâ AB es menor que todas las que las rodean.

PROPOSICION PRIMERA.

TEOREMA.

La solidez de un cilindro es igual al producto de su base por su altura.

Sea CA el radio de la base del cilindro dado, H su altura. Representemos por *sup.* CA la superficie del círculo cuyo radio es CA: digo que la solidez del cilindro será *sup.* CA × H. Fig. 258.

Porque si *sup.* CA × H no es la medida del cilindro dado, este producto expresará un cilindro mayor ó menor. Supongamos primero que sea la medida de un cilindro menor, v. gr., del cilindro en que CD es el radio de la base y H la altura.

Circunscríbase al círculo cuyo radio es CD un polígono regular GHIP, cuyos lados no encuentren á la circunferencia cuyo radio es CA*. Imaginemos un prisma recto que tenga por base el polígono GHIP, y por altura H, el qual estará circunscito al cilindro en que CD es el radio de la base. Esto sentado, la solidez del prisma* es igual á su base GHIP multiplicada por la al-

* 10. 4.

* Pr. 14. lib. 6.

tura H; la base GHIP es menor que el círculo cuyo radio es CA: luego la solidez del prisma es menor que *sup.* CA × H. Pero *sup.* CA × H es, segun la suposicion, la solidez del cilindro inscrito en el prisma: luego el prisma seria menor que el cilindro; pero al contrario, el cilindro es menor que el prisma, pues está dentro de él: luego es imposible que *sup.* CA × H sea la medida del cilindro en que CD es el radio de la base y H la altura; ó, en términos mas generales, *el producto de la base de un cilindro por su altura no puede ser medida de un cilindro menor.*

Digo en segundo lugar que este producto no puede expresar un cilindro menor, porque, para no multiplicar figuras, sea CD el radio de la base del cilindro dado, y sea, si es posible, *sup.* CD × H la medida de un cilindro mayor, v. gr., del cilindro en que CA es el radio de la base y H la altura.

Si hacemos la misma construccion que en el caso primero, el prisma circunscrito al cilindro dado tendrá por medida GHIP × H; pero el area GHIP es mayor que *sup.* CD: luego la solidez del prisma de que tratamos es mayor que *sup.* CD × H: luego el prisma seria mayor que el cilindro de la misma altura, y cuya base es *sup.* CA. Pero al contrario, el prisma es menor que el cilindro, pues está contenido en él: luego *es imposible que la base de un cilindro multiplicada por su altura sea medida de un cilindro mayor.*

Luego finalmente, la solidez de un cilindro es igual al producto de su base por su altura.

Corolario I. Los cilindros de una misma altura estan entre sí como sus bases, y los cilindros de una misma base estan como sus alturas.

Corolario II. Los cilindros semejantes estan como los cubos de las alturas, ó como los cubos de los diámetros de las bases. Porque las bases siguen la razon de los quadrados de sus diámetros, y siendo semejantes los cilin-
* Def. 4. dros, los diámetros de las bases son como las alturas *:

luego las bases son como los quadrados de las alturas: luego las bases multiplicadas por las alturas, ó los cilindros mismos, son como los cubos de las alturas.

Escolio. Sea R el radio de la base de un cilindro, H su altura; la superficie * de la base será ϖR^2, y la solidez del cilindro $= \varpi R^2 \times H$, ó ϖR^2H. * 12. 4.

PROPOSICION II.

LEMA.

La superficie convexâ de un prisma recto es igual al perímetro de su base multiplicado por su altura.

Porque esta superficie es igual á la suma de los rectángulos AFGB, BGHC, CHID, &c. de que está compuesta; pero las alturas AF, BG, CH, &c. de estos rectángulos son iguales á la altura del prisma, y sus bases AB, BC, CD juntas forman el perímetro de su base: luego la suma de estos rectángulos, ó la superficie convexâ del prisma, es igual al perímetro de su base multiplicado por su altura. Fig. 252.

Corolario. Dos prismas rectos de una misma altura, tienen sus superficies convexâs en razon de los perímetros de sus bases.

PROPOSICION III.

LEMA.

La superficie convexâ del cilindro es mayor que la superficie convexâ de todo prisma inscrito, y menor que la superficie convexâ de qualquier prisma circunscrito.

Porque la superficie convexâ del cilindro y la del prisma inscrito ABCDEF pueden considerarse como de una misma longitud, pues toda seccion hecha en una y en otra paralela á AF es igual á AF; y si para saber la latitud de estas superficies las cortamos con planos pa- Fig. 252.

ralelos á la base ó perpendiculares á la arista AF, las secciones serán iguales, una á la circunferencia de la base, y la otra al perímetro del polígono ABCDE menor que esta circunferencia: luego, ya que, siendo de una misma longitud, la latitud de la superficie cilindrica es mayor que la de la superficie prismática, síguese que la primera superficie es mayor que la segunda.

Fig. 253. Por un raciocinio enteramente semejante se probará que la superficie convexâ del cilindro es menor que la de todo prisma circunscrito BCDKLM.

PROPOSICION IV.

TEOREMA.

La superficie convexâ de un cilindro es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su altura.

Sea CA el radio de la base del cilindro dado, H su altura; si representamos por *circ.* CA la circunferencia cuyo radio es CA: digo que *circ.* CA×H será la superficie convexâ de este cilindro.

Porque si se niega esta proposicion, será preciso que *circ.* CA× H sea la superficie de otro cilindro mayor ó menor. Supongamos desde luego que sea la superficie de un cilindro menor, v. gr., del cilindro en que CD es el radio de la base y H la altura.

Circunscríbase al círculo cuyo radio es CD un polígono regular GHIP, cuyos lados no encuentren á la circunferencia cuyo radio es CA; imaginemos luego un prisma recto que tenga por altura H, y por base el polígono GHIP. La superficie convexâ de este prisma será igual al perímetro del polígono GHIP multiplicado por la altura H *; este perímetro es menor que la circunferencia cuyo radio es CA: luego la superficie convexâ del prisma es menor que *circ.* CA × H. Pero *circ.* CA × H es, segun lo supuesto, la superficie convexâ del cilindro en que CD es el radio de la base, y el qual está inscrito

* Pr. 2.

en el prisma: luego la superficie convexâ del prisma seria menor que la del cilindro inscrito. Pero al contrario, debe ser mayor *: luego es falsa la suposicion: luego 1.° *la circunferencia de la base de un cilindro multiplicada por su altura no puede expresar la superficie convexâ de un cilindro menor.* * Pr. 3.

Digo en segundo lugar que este producto tampoco puede expresar la superficie de un cilindro mayor. Porque, para no mudar figura, sea CD el radio de la base del cilindro dado, y sea, si es posible, *circ.* CD × H la superficie convexâ de un cilindro que, siendo de la misma altura, tuviese por base un círculo mayor, v. gr., el círculo cuyo radio es CA. Se hará la misma construccion que en la hipótesis primera y la superficie convexâ del prisma será siempre igual al perímetro del polígono GHIP multiplicado por la altura H. Pero este perímetro es mayor que *circ.* CD: luego la superficie del prisma seria mayor que *circ.* CD × H, que, segun lo supuesto, es la superficie del cilindro de la misma altura de cuya base es CA el radio. Luego la superficie del prisma seria mayor que la del cilindro. Pero aun quando el prisma estuviese inscrito en el cilindro, su superficie seria menor que la del cilindro *: luego con mayor razon será menor quando el prisma no llega á tocar al cilindro. Luego es falsa la segunda hipótesis, y por consiguiente 2.° *la circunferencia de la base de un cilindro multiplicada por su altura no puede ser medida de la superficie de otro cilindro mayor.* * Pr. 3.

Luego finalmente, la superficie convexâ de un cilindro es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su altura.

PROPOSICION V.

TEOREMA.

La solidez de un cono es igual al producto de su base multiplicada por el tercio de su altura.

Fig. 259. Sea SO la altura del cono dado, AO el radio de la base. Llamemos *sup.* AO la superficie de la base: digo que la solidez de este cono será igual á *sup.* AO $\times \frac{1}{3}$SO.

En efecto, supongamos 1.° que *sup.* AO $\times \frac{1}{3}$SO sea la solidez de un cono mayor, v. gr., del cono cuya altura es siempre SO, pero cuya base tiene por radio á OB mayor que AO.

Al círculo cuyo radio es AO circunscríbase un polígono regular MNPT, que no encuentre á la circunfe-
* 10. 4. rencia cuyo radio es OB*, imaginemos ademas una pirámide cuya base sea el polígono y el vértice el punto
* 19. 6. S. La solidez de esta pirámide* es igual al area del polígono MNPT multiplicada por el tercio de la altura SO. Pero el polígono es mayor que el círculo inscrito representado por *sup.* AO: luego la pirámide es mayor que *sup.* AO $\times \frac{1}{3}$SO que, segun hemos supuesto, expresa el cono cuyo vértice es S y OB el radio de base. Pero es así que la pirámide es menor que el cono, pues está dentro de él: luego 1.° es imposible que la base de un cono multiplicada por el tercio de su altura sea la medida de un cono mayor.

Digo 2.° que este producto tampoco puede expresar un cono menor. Porque, para no mudar figura, sea OB el radio de la base del cono dado, y sea, si es posible, *sup.* OB $\times \frac{1}{3}$SO la solidez del cono que tiene por altura SO y por base el círculo cuyo radio es AO. Se hará la misma construccion que anteriormente, y la pirámide SMNP, &c. tendrá por medida el área MNPT multiplicada por $\frac{1}{3}$SO. Pero el área MNPT es menor que *sup.* OB: luego la pirámide tendria una medida menor que *sup*. $OB \times \frac{1}{3}SO$, y por consiguiente seria menor que el cono que tiene á AO por radio de la base y SO por altura. Pero es así que la pirámide es mayor que el cono, pues el cono está dentro de ella: luego 2.° es imposible que la base de un cono multiplicada por el tercio de su altura sea medida de un cono menor.

Luego finalmente la solidez de un cono es igual al producto de su base por el tercio de su altura.

Corolario. Un cono es la tercera parte de un cilindro de la misma base y altura que él; de donde se deduce

1.° Que los conos de alturas iguales estan entre sí como sus bases.

2.° Que los conos de bases iguales estan entre sí como sus alturas.

3.° Que los conos semejantes siguen la razon de los cubos de los diámetros de sus bases, ó de los cubos de sus alturas.

Escolio. Sea R el radio de la base de un cono, H su altura; su solidez será $\pi R^2 \times \frac{1}{3}H$, ó $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

PROPOSICION VI.

TEOREMA.

El cono truncado ADEB, *cuyos radios de las bases son* OA y DP, y PO *la altura*, *tiene por medida* $\frac{1}{3}\pi$ $OP. ((AO)^2 + (DP)^2 + AO \times DP)$. Fig. 260.

Sea TFGH una pirámide triangular de la misma altura que el cono SAB, y cuya base FGH sea equivalente á la del cono. Podemos suponer que estas dos bases estan en un mismo plano, en cuyo caso los vértices S y T equidistarán del plano de las bases, y el plano EPD prolongado hará en la pirámide la seccion IKL. Digo, pues, que esta seccion IKL es equivalente á la base DE.

Porque las bases AB, DE estan entre sí como los quadrados de los radios AO, DP *, ó como los quadrados de las alturas SO, SP; los triángulos FGH, * 11. 4.

IKL son entre sí como los quadrados de estas mismas
* 15. 6. alturas *: luego los círculos AB, DE estan en la razon de los triángulos FGH, IKL. Pero, por su posicion, el triángulo FGH es equivalente al círculo AB: luego el triángulo IKL lo es tambien al círculo DE.

La base AB multiplicada por $\frac{1}{3}$SO es la solidez del cono SAB, y la base FGH multiplicada por $\frac{1}{3}$SO es la de la pirámide CFGH: luego por ser las bases equivalentes, la solidez de la pirámide es igual á la del cono. Por una razon semejante, la pirámide TIKL es equivalente al cono SDE: luego el tronco de cono ADEB es equivalente al tronco de pirámide FGHIKL. Pero la base FGH, equivalente al círculo, cuyo radio es AO, tiene por medida $\pi \times (AO)^2$; del mismo modo la base IKL $= \pi \times (DP)^2$, y la media proporcional entre $\pi \times (AO)^2$ y $\pi \times (DP)^2$ es $\pi \times AO \times DP$: luego la solidez del tronco de pirámide, ó la del tronco de cono, tiene por medida $\frac{1}{3}OP \times (\pi \times (AO)^2 + \pi \times (DP)^2 + \pi \times AO$
* 20. 6. $\times DP)$ *, que es lo mismo que $\frac{1}{3}\pi \times OP \times ((OA)^2 + (DP)^2 + AO \times DP)$.

PROPOSICION VII.

TEOREMA.

La superficie convexâ de un cono es igual á la circunferencia de su base multiplicada por la mitad de su lado.

Fig. 259. Sea AO el radio de la base del cono dado, S su vértice, y SA su lado: digo que su superficie será *circ.* $AO \times \frac{1}{2}SA$.

Porque sea, si es posible, *circ.* $AO \times \frac{1}{2}SA$ la superficie de un cono, cuyo vértice fuese el punto S, y por la base el círculo trazado con el radio OB mayor que AO.

Circunscríbase al círculo menor de los dos un polígono regular MNPT, cuyos lados no encuentren á la circunferencia que tiene á OB por radio; y sea SMNPT la pirámide regular que tendria por base el polígono, y por vértice el punto S. El triángulo SMN, que es uno de los que componen la superficie convexâ de la pirámide, tiene por medida su base MN multiplicada por la mitad de su altura SA, que es al mismo tiempo el lado del cono dado; siendo igual esta altura en todos los triángulos SNP, SPQ, &c., síguese que la superficie convexâ de la pirámide es igual al perímetro MNPQR, &c., multiplicado por $\frac{1}{2}$SA. Pero el perímetro MNPQR, &c., es mayor que *circ.* AO: luego la superficie convexâ de la pirámide es mayor que *circ.* AO $\times$ $\frac{1}{2}$SA, y mayor por consiguiente que la superficie convexâ del cono, que teniendo el mismo vértice S, tuviese por base el círculo descrito con el radio OB. Pero al contrario, la superficie convexâ del cono es mayor que la de la pirámide; porque si sobreponemos por las bases una á otra las pirámides iguales, y lo mismo los conos iguales, la superficie de los dos conos cubrirá por todas partes á la de las dos pirámides: luego la primera superficie será mayor que la segunda *: luego la superficie del cono es mayor que la de la pirámide comprehendida en él. Hubiéramos deducido una conseqüencia contraria de nuestra suposicion: luego 1.° la circunferencia de la base de un cono multiplicada por la mitad de su lado no puède ser medida de la superficie de un cono mayor. * Lem. 2.

Digo en segundo lugar que este producto tampoco puede expresar la superficie de un cono menor.

Porque sea BO el radio de la base, y sea, si es posible, *circ.* BO $\times$ $\frac{1}{2}$SB la superficie del cono, cuyo vértice es S, y AO, menor que OB, el radio de la base.

Habiendo hecho la misma construccion que en los casos anteriores, la superficie de la pirámide SMNPT será siempre igual al perímetro MNPT multiplicado por $\frac{1}{2}$SA. Pero el perímetro MNPT es menor que *circ.* BO, SA es menor que SB: luego por estas dos razones la superficie convexâ de la pirámide es menor que *circ.* $BO \times \frac{1}{2}SB$, que, segun lo supuesto, es la superficie del cono en que AO es el radio de la base: luego la superficie de la pirámide seria menor que la del cono inscrito. Pero es así que es mayor; porque sobreponiendo por las bases la pirámide á otra su igual, y el cono á otro cono, la superficie de las dos pirámides cubrirá á la de los dos conos, y será por consiguiente mayor. Luego 2.° es imposible que la circunferencia de la base de un cono dado multiplicada la mitad de su lado exprese la superficie de un cono menor.

Luego finalmente la superficie convexâ de un cono es igual á la circunferencia de su base multiplicada por la mitad de su lado.

Escolio. Sea L el lado de un cono, R el radio de su base, la circunferencia de esta base será $2\pi R$, y la superficie del cono $2\pi R \times \frac{1}{2}L$, ó πRL.

PROPOSICION VIII.

TEOREMA.

Fig. 261. *La superficie convexâ del tronco de cono* ADEB *es igual á su lado* AD *multiplicado por la semisuma de las circunferencias de sus dos bases* AB, DE.

En el plano SAB, que pasa por el exe SO, tírese la línea AF, perpendicular á SA, cuya línea será igual á la circunferencia, cuyo radio es AO; tírese SF, y tírese tambien DH paralela á AF.

Por ser semejantes los triángulos SAO, SDC, tendremos AO : DC : : SA : SD; y por serlo tambien los triángulos SAF, SDH tendremos AF : DH : : SA : SD;
* 11, 4. luego AF : DH : : AO : DC, ó, : : *circ.* AO : *circ.* DC*. Pero por construccion AF = *circ.* AO; luego DH = *circ.* DC. Esto sentado, el triángulo SAF, cuya medida es $AF \times \frac{1}{2}SA$, es igual á la superficie del cono SAB, que tiene por medida *circ.* $AO \times \frac{1}{2}SA$. Por una razon semejante el triángulo SDH es igual á la superficie del cono

SDE. Luego la superficie del tronco ADEB es igual á la del trapecio ADHF. Esta tiene por medida * $AD \times \left(\frac{AF + DH}{2}\right)$: luego la superficie del tronco de cono ADEB es igual á su lado AD multiplicado por la semi-suma de las circunferencias de sus dos bases. * 7. 3.

Corolario. Por el punto I, medio de ED, tírese IKL paralela á AB, é IM paralela á AF; se demostrará como ántes que IM = *circ.* IK. Pero el trapecio ADHF = AD × IM = AD × *circ.* IK. Luego podemos decir tambien que *la superficie de un tronco de cono es igual á su lado multiplicado por la circunferencia de una seccion hecha á iguales distancias de las dos bases.*

Escolio. Si una línea AD, situada toda hácia un mismo lado de la línea OC, y en el mismo plano que ella, gira al rededor de OC, la superficie trazada por AD tendrá por medida $AD \times \left(\frac{circ.\ AO + circ.\ DC}{2}\right)$, ó AD × *circ.* IK; siendo las líneas AO, DC, IK perpendiculares tiradas al exe OC desde los extremos, y desde el medio de la línea AD.

Porque si prolongamos AD y OC hasta que se encuentren en S, claro está que la superficie trazada por AD es la de un cono truncado, en el qual son AO y DC los radios de las bases, siendo el punto S el vértice del cono entero. Luego esta superficie tendrá la medida arriba dicha.

Siempre se verificaria esta medida aun quando el punto D cayese en S, lo que daria un cono entero, y tambien en caso de ser la línea AD paralela al exe, de donde se originaria un cilindro. En el primer caso DC seria nula, y en el segundo DC seria igual á AO y á IK.

PROPOSICION IX.

LEMA.

Fig. 263. *Sean* AB, BC, CD *muchos lados sucesivos de un polígono regular*, O *su centro*, *y* OI *el radio del círculo inscrito*, *si suponemos que la porcion de polígono* ABCD, *que cae á un lado del diámetro* FG, *da una revolucion al rededor de él*, *la superficie trazada por* ABCD *tendrá por medida* MQ × circ. OI, *siendo* MQ *la altura de esta superficie*, *ó la parte del exe comprehendida entre las perpendiculares extremas* AM, DQ.

Siendo el punto I medio de AB, é IK una perpendicular al exe baxada desde el punto I, la superficie trazada por AB tendrá por medida AB × *circ.* IK *. Tírese AX paralela al exe; los triángulos ABX, OIK tendrán sus lados respectivamente perpendiculares, esto es, OI á AB, IK á AX, y OK á BX: luego estos triángulos son semejantes, y dan la proporcion AB : AX = MN : : OI : IK, ó : : *circ.* OI : *circ.* IK : luego AB × *circ.* IK = MN × *circ.* OI. Donde vemos que la superficie trazada por AB es igual á su altura MN multiplicada por la circunferencia del círculo inscrito. Igualmente la superficie trazada por BC es igual á NP × *circ.* OI, la trazada por CD, = PQ × *circ.* OI. Luego la superficie trazada por la porcion de polígono ABCD tiene por medida (MN + NP + PQ) × *circ.* OI, ó MQ × *circ.* OI: luego es igual á su altura multiplicada por la circunferencia del círculo inscrito.

* Pr. 8.

Corolario. Si el polígono entero tiene un número par de lados, y el exe FG pasa por dos vértices opuestos F y G, la superficie entera trazada por la revolucion del semipolígono FACG será igual á su exe FG multiplicado por la circunferencia del círculo inscrito. Este exe FG será al mismo tiempo el diámetro del círculo inscrito.

PROPOSICION X.

TEOREMA.

La superficie de la esfera es igual á su diámetro multiplicado por la circunferencia de un círculo máxîmo.

Digo 1.° que el diámetro de una esfera multiplicado por la circunferencia de su círculo máxîmo no puede ser medida de una esfera mayor. Porque sea, si es posible, AB × *circ.* AC la superficie de la esfera, cuyo radio es CD. Fig. 264.

Circunscríbase al círculo, cuyo radio es CA, un polígono regular de un número par de lados que no encuentre á la circunferencia, cuyo radio es CD. Sean M y S dos ángulos opuestos de este polígono, y hagamos girar el semipolígono MPS al rededor del diámetro MS.

La superficie trazada por este polígono tendrá por medida MS × *circ.* AC *; pero MS es mayor que AB: luego la superficie trazada por el polígono es mayor que AB × *circ.* AC, y por consiguiente mayor que la superficie de la esfera, cuyo radio es CD. Pero es así que la superficie de la esfera es mayor que la trazada por el polígono, pues la primera rodea enteramente á la segunda: luego 1.° el diámetro de una esfera multiplicado por la circunferencia de su círculo máxîmo no puede ser medida de la superficie de otra esfera mayor. * Pr. 9.

Digo 2.° que este mismo producto no puede expresar la superficie de una esfera menor. Porque sea, si es posible, DE × *circ.* CD la superficie de la esfera, cuyo radio es CA. Se hará la misma construccion que en el caso primero, y la superficie del sólido engendrado por el poligono será siempre igual á MS × *circ.* AC. Pero MS es menor que DE, y *circ.* AC menor que *circ.* CD: luego por estas dos razones la superficie del sólido formado por el polígono seria menor que DE × *circ.* CD, y menor por consiguiente que la superficie de la esfera, cuyo radio es AC. Pero al contrario la superficie trazada por este polígono es mayor que la superficie de la esfera, cuyo radio es AC, pues la primera cubre enteramente á la segunda: luego 2.° el diámetro de una esfera multiplicado por la circunferencia de su círculo máxîmo no puede expresar la superficie de una esfera menor.

Luego la superficie de la esfera es igual á su diámetro multiplicado por la circunferencia de un círculo máxîmo.

Corolario. La superficie del círculo máxîmo se mide multiplicando su circunferencia por la mitad del radio ó la quarta parte del diámetro: luego *la superficie de la esfera es quadrupla de la de uno de sus círculos máxîmos.*

Escolio. Habiendo medido y comparado ya la superficie de la esfera con superficies planas, será fácil hallar el valor absoluto de los usos y triángulos esféricos, cuya relacion con la superficie total de la esfera queda ya determinada.

Primeramente, el uso esférico, cuyo ángulo es A, es á la superficie de la esfera como el ángulo A es á
* 20, 7. quatro ángulos rectos *, ó como el arco de círculo máxîmo que mide el ángulo A es á la circunferencia de dicho círculo. Pero la superficie de la esfera es igual á esta circunferencia multiplicada por el diámetro: luego la del uso esférico es igual al arco que mide su ángulo multiplicado por el diámetro.

En segundo lugar todo triángulo esférico es equivalente á un uso esferico, cuyo ángulo es igual á la mitad de la diferencia entre la suma de sus tres ángulos
* 23. 7. y dos rectos *. Sean P, Q, R los arcos de círculo máxîmo que miden los tres ángulos del triángulo; sea C la circunferencia de un círculo máxîmo, y D su diámetro. El triángulo esférico será equivalente al uso esférico, cuyo ángulo tiene por medida $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$, y por consiguiente su superficie será $D\times\left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}\right)$.

Así, en el caso del triángulo tri-rectángulo, cada uno de los arcos P, Q, R es igual á $\frac{1}{4}$ C, su suma es $\frac{3}{4}$ C, el exceso de esta suma á $\frac{1}{2}$ C es $\frac{1}{4}$ C, y su mitad $= \frac{1}{8}$ C: luego la superficie del triángulo tri-rectángulo $= \frac{1}{8}$ C $\times$ D, que es la octava parte de la superficie total de la esfera.

La medida de los polígonos esféricos se deduce inmediatamente de la de los triángulos, y está ademas enteramente determinada por la prop. XXIV, lib. VII, pues la unidad de medida, que es el triángulo tri-rectángulo, acaba de valuarse en superficie plana.

PROPOSICION XI.

LEMA.

Supuestas las mismas cosas que en la proposicion IX, *si ademas el punto* F, *extremo del exe, es uno de los vértices del polígono, y tenemos* FK<FO; *digo que la superficie engendrada por la porcion del polígono* FAI, *compuesta de muchos lados enteros* FA *y la mitad de otro* AI, *es menor que* FK $\times$ circ. OI. Fig. 269.

Porque la superficie trazada por la parte FA tiene por medida * FM $\times$ *circ.* OI, y la superficie trazada por el semilado AI tiene por medida AI $\times$ ($\frac{1}{2}$ *circ.* AM + $\frac{1}{2}$ *circ.* IK) *. AM es menor que IK, por ser FK menor que FO: luego la superficie trazada por AI es menor que AI $\times$ *circ.* IK, ó su igual MK $\times$ *circ.* OI: luego la superficie entera trazada por FAI es menor que FM $\times$ *circ.* OI + MK $\times$ *circ.* OI, ó FK $\times$ *circ.* OI.

* Pr. 9.
* Pr. 8.

PROPOSICION XII.

TEOREMA.

La superficie de una zona esférica qualquiera es igual al producto de su altura por la circunferencia de un círculo máximo.

Fig. 271. Sea desde luego AB un arco menor, ó á lo ménos no mayor que la quarta parte de la circunferencia, y tírese al radio AC la perpendicular BD: digo que la zona descrita por la revolucion del arco AB al rededor de AC tiene por medida AD × *circ* AC.

Porque supongamos primeramente que esta zona tenga una medida mayor, y sea, si es posible, esta medida = DE × *circ*. AC. Circunscríbase al arco AB una porcion de polígono regular B*xyzu*, que no encuentre al arco descrito con el radio CE, y que esté compuesto de muchos lados enteros *uzyx*, y de un medio-lado B*x* (1). Esto sentado, la superficie trazada por el polígono B*xyzu*,
* Pr. 11. girando al rededor de Du, es menor que Du × *circ*. AC*, y con mayor razon menor que DE × *circ*. AC, que, por hipótesis, es la medida de la zona trazada por AB. Luego la superficie descrita por el polígono seria menor que la descrita por el arco inscrito; pero es al contrario, la primera superficie es mayor que la segunda, pues la cubre por todas partes: luego seria absurda la suposicion: luego 1.° la medida de una zona esférica no puede ser mayor que el producto de su altura por la circunferencia del círculo máxîmo.

Digo en segundo lugar que la medida de una zona esférica no puede ser menor que el producto de su altura por la circunferencia del círculo máxîmo, porque supongamos que se trata de la zona trazada por el arco FE, y sea, si es posible, la medida de esta zona = GE × *circ*. AC menor que GE × *circ*. CE. Inscríbase en el arco EF una porcion de polígono regular EMNF, cuyos lados no encuentran al arco descrito con el radio CA, y báxese al lado EM la perpendicular CI. La superficie trazada por el polígono EOF tendrá por medida
* Pr. 9. da EG × *circ*. CI *, mayor que EG × *circ*. CA que, por suposicion, es la medida de la zona descrita por el arco

(1) Estas dos condiciones se cumplen dividiendo el arco AB en un número impar de partes iguales, una de las quales A*m* sea menor que AT, determinada por la tangente ET tirada al punto E.

FE. Luego la superficie trazada por el polígono FOE seria mayor que la zona descrita por el arco circunscrito FE ; pero, al contrario, la segunda superficie es mayor que la primera, pues la cubre por todas partes: luego 2.° la medida de una zona esférica no puede ser menor que el producto de su altura multiplicada por la circunferencia de un círculo máxîmo.

Síguese de aquí que la zona descrita por el arco DF tiene por medida OD × *circ.* DC, á lo ménos en tanto que el arco DF no exceda á la quarta parte de la circunferencia. Pero la esfera entera, compuesta de dos zonas descritas por los arcos DF y FE, tiene por medida DE × *circ.* DC, ó OD × *circ.* DC + OE × *circ.* DC: luego una vez que OD × *circ.* DC es igual á la zona descrita por el arco DF, será menester que OE × *circ.* DC sea igual á la zona descrita por el arco FE, mayor que la quarta parte de la circunferencia: luego *toda zona de una base tiene por medida su altura multiplicada por la circunferencia de un círculo máxîmo.* Fig. 220.

Consideremos finalmente una zona qualquiera descrita por la revolucion del arco FH al rededor del exe DE, y báxense al exe las dos perpendiculares FO, HQ. La zona descrita por el arco DF tiene por medida DO × *circ.* DC: la descrita por el arco DH = DQ × *circ.* DC: luego la diferencia entre estas dos zonas, ó la zona descrita por el arco FH, tiene por medida (DQ — DO) × *circ.* DC, ú OQ × *circ.* DC. Luego toda zona esférica de una ó dos bases tiene por medida el producto de su altura por la circunferencia de un círculo máxîmo.

Corolario. Dos zonas estan entre sí como sus alturas, y una zona qualquiera es á la superficie de la esfera como la altura de la zona es al diámetro.

PROPOSICION XIII.

TEOREMA.

Fig. 266. y 267. *Si el triángulo* BAC *y el rectángulo* BCEF, *de una misma base y altura, giran simultaneamente al rededor de la base comun* BC, *el sólido descrito por la revolucion del triángulo será la tercera parte del cilindro trazado por la revolucion del rectángulo.*

Fig. 266. Baxese al exe la perpendicular AD.

El cono trazado por el triángulo ABD es la tercera parte del cilindro formado por el rectángulo AFBD*; igualmente el cono descrito por el triángulo ADC es la tercera parte del cilindro formado por el rectángulo ADCE: luego la suma de los dos conos, ó el sólido descrito por ABC, es la tercera parte de la suma de los dos cilindros, ó del cilindro descrito por el rectángulo BCEF.

* Pr. 5.

Fig. 267. Si cayese la perpendicular AD fuera del triángulo, entónces el sólido descrito por ABC sería la diferencia de los conos descritos por ABD y ACD; pero al mismo tiempo el cilindro descrito por BCEF seria la diferencia de los cilindros descritos por AFBD y AECD. Luego el sólido trazado por la revolucion del triángulo será siempre la tercera parte del cilindro formado por la revolucion del rectángulo de la misma base y altura.

Escolio. El círculo cuyo radio es AD tiene por superficie $\pi \times (AD)^2$: luego $\pi \times (AD)^2 \times BC$ es la medida del cilindro descrito por BCEF, y $\frac{1}{3} \pi \times (AD)^2 \times BC$ es la del sólido descrito por el triángulo ABC.

PROPOSICION XIV.

PROBLEMA.

Suponiendo que el triángulo CAB *da una revolucion al rededor de la línea* CD, *tirada arbitrariamente fuera del triángulo por su vértice* C, *hallar la medida del sólido así engendrado.* Fig. 268.

Prolónguese el lado AB hasta que encuentre al exe CD en D. Desde los puntos A y B báxense al exe las perpendiculares AM, BN.

El sólido trazado por el triángulo ADC tiene por medida* $\frac{1}{3}\pi \times (AM)^2 \times CD$. El sólido descrito por el triángulo CBD, $= \frac{1}{3}\pi \times (BN)^2 \times CD$: luego la diferencia de estos sólidos, ó el sólido formado por ABC, tendrá por medida $\frac{1}{3}\pi. ((AM)^2 - (BN)^2) \times CD$. * Pr. 13.

Podemos dar otra forma á esta expresion. Desde el punto I, medio de AB, tírese IK perpendicular á CD, y por el punto B, BO paralela á CD; tendremos* $AM + BN = 2IK$, y $AM + BN = AO$: luego $(AM + BN) \times (AM - BN)$, ó $(AM)^2 - (BN)^2 = 2IK \times AO$*. Por consiguiente el sólido de que se trata está expresado por $\frac{1}{3}\pi \times IK \times AO \times CD$. Pero si baxamos á AB la perpendicular CP, los triángulos ABO, DCP serán semejantes, y darán la proporcion $AO : CP :: AB : CD$; de donde resulta $AO \times CD = CP \times AB$; por otra parte $CP \times AB$ es duplo del área del triángulo ABC, y así tenemos $AO \times CD = 2\ ABC$: luego la solidez descrita por el triángulo ABC tiene tambien por medida $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times KI$, ó, lo que es todo uno, $ABC \times \frac{2}{3}$ *circ.* KI; (porque *circ.* $IK = 2\pi\ IK$). Luego *el sólido formado por la revolucion del triángulo* ABC *tiene por medida el área de este triángulo multiplicada por los dos tercios de la circunferencia que describe el punto* I, *medio de la base.* * 1. 3. * 10. 5.

Corolario. Si el lado AC = CB, la línea CI será perpendicular á AB el área ABC será igual á $AB \times \frac{1}{2} CI$; y Fig. 269.

...

la solidez $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times IK$ se transformará en $\frac{2}{3}\pi \times AB \times IK \times CI$. Pero los triángulos ABO, CIK son semejantes, y dan la proporcion $AB : BO = MN :: CI : IK$; luego $AB \times IK = MN \times CI$; luego el sólido trazado por el triángulo isósceles ABC tendrá por medida $\frac{2}{3}\pi \times MN \times (CI)^2$.

Escolio. En la demostracion anterior suponemos que la línea AB prolongada encuentra al exe; pero no dexarian de ser los resultados igualmente ciertos, siendo la línea AB paralela al exe.

Fig. 270. Con efecto, la medida del cilindro descrito por AMNB es $\pi . (AM)^2 \times MN$, el cono trazado por ACM $= \frac{1}{3}\pi \times (AM)^2 \times CM$, y el formado por $BCN = \frac{1}{3}\pi \times (AM)^2 \times CN$. Sumando los dos primeros sólidos y restando el tercero, tendremos para valor del sólido descrito por ABC, $\pi \times (AM)^2 \times (MN + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CN)$ y ya que $CN - CM = MN$, se reduce esta expresion á $\pi \times (AM)^2 \times \frac{2}{3} MN$, ó $\frac{2}{3}\pi (CP)^2 \times MN$, lo que coincide con los resultados ya hallados.

PROPOSICION XV.

TEOREMA.

Fig. 163. *Sean* AB, BC, CD, *muchos lados sucesivos de un polígono regular*, O *su centro*, *y* OI *el radio del círculo inscrito; si imaginamos que el sector poligonal* AOD, *situado á un mismo lado del diámetro* FG, *da una revolucion al rededor de él, el sólido descrito tendrá por medida* $\frac{2}{3}\pi \times (OI)^2 \times MQ$, *siendo* MQ *la porcion del exe terminada por las perpendiculares extremas* AM, DQ.

Con efecto, una vez que es regular el polígono, todos los triángulos AOB, BOC, &c. son iguales é isósceles. Segun el corolario anterior, el sólido producido por el triángulo isósceles OAB tiene por medida $\frac{2}{3}\pi \times (OI)^2 \times MN$, el sólido descrito por el triángulo $BOC = \frac{2}{3}\pi \times (OI)^2 \times NP$, y el sólido formado por el triángulo $COD = \frac{2}{3}\pi \times$

$(OI)^2 \times PQ$; luego la suma de estos sólidos, ó el sólido entero descrito por el sector poligonal AOD, tendrá por medida $\frac{2}{3}\pi (OI)^2 \times (MN + NP + PQ) = \frac{2}{3}\pi \times (OI)^2 \times MQ$.

PROPOSICION XVI.

TEOREMA.

Todo sector esférico tiene por medida la zona que le sirve de base multiplicada por el tercio del radio, y la esfera entera es igual al producto de su superficie por el tercio del radio.

Sea ABC el sector circular que, girando al rededor de AC, traza el sector esférico; siendo $AD \times circ.\ AC = 2\pi \times AC \times AD$ el valor de la zona descrita por AB*, digo que el sector esférico tendrá por medida el producto de esta zona por $\frac{1}{3}$ AC, ó $\frac{2}{3}\pi \times (AC)^2 \times AD$. Fig. 271. * Pr. 12.

En efecto, 1.° Supongamos, si es posible, que $\frac{2}{3}\pi \times (AC)^2 \times AD$ sea la medida de un sector esférico mayor, por exemplo, del sector esférico descrito por el sector circular ECF semejante á ACB.

Inscríbase en el arco EF la porcion de polígono regular EMNF, cuyos lados no encuentren al arco AB; imaginemos luego que el sector poligonal ENFC gira al rededor de EC al mismo tiempo que el sector circular ECF. Sea CI el radio del círculo inscrito en el polígono, y báxese á EC la perpendicular FG. El sólido descrito por el sector poligonal tendrá por medida * $\frac{2}{3}\pi \times (CI)^2 \times EG$; pero CI es mayor que AC por construccion, y $EG > AD$, porque, tirando AB, EF, los triángulos EFG y ABD, que son semejantes, dan la proporcion $EG : AD :: EF : AB :: CF : CB$; luego $EG > AD$. * Pr. 15.

Por estas dos razones $\frac{2}{3}\pi \times (CI)^2 \times EG$ es mayor que $\frac{2}{3}\pi \times (CA)^2 \times AD$: la primera expresion es la medida del sólido trazado por el sector poligonal; la segunda es, por hipótesis, la del sector esférico descrito por el sector circular ECF: luego el sólido formado por el sector poligonal seria mayor que el sector esférico descrito por el sector circular ECF. Pero, al contrario, el sólido de que tratamos es menor que el sector esférico que le contiene: luego es absurda la suposicion: luego 1.° la zona ó base de un sector esférico multiplicada por el tercio del radio no puede ser medida de un sector esférico mayor.

Digo 2.° que este producto no puede expresar un sector esférico mayor. Porque sea CEF el sector circular, que ha producido con su revolucion el sector esférico dado, y supongamos, si es posible, que $\frac{2}{3}\pi \times (CE)^2 \times EG$. sea la medida de un sector esférico menor, v. gr. del engendrado por el sector circular ACB.

Permaneciendo la misma la construccion anterior, el sólido producido por el sector poligonal, tendrá siempre por medida $\frac{2}{3}\pi \times (CI)^2 \times EG$. Pero CI es menor que CE: luego el sólido es menor que $\frac{2}{3}\pi \times (CE)^2 \times EG$, que, segun lo supuesto, es la medida del sector esférico descrito por el sector circular ACB. Luego el sólido descrito por el sector poligonal seria menor que el sector esférico producido por ACB; pero es así que el sólido de que tratamos es mayor que el sector esférico, pues este está contenido en el otro. Luego 2.° es imposible que la zona de un sector esférico multiplicada por la tercera parte del radio sea medida de un sector esférico menor.

Luego todo sector esférico tiene por medida la zona que le sirve de base multiplicada por la tercera parte del radio.

Un sector circular ACB puede ir creciendo hasta llegar á ser igual al semicírculo, en cuyo caso el sector esférico producido por su revolucion es la esfera entera. Luego *la solidez de la esfera es igual al producto de su superficie por la tercera parte del radio.*

Corolario. Estando las superficies de las esferas entre sí como los quadrados de sus radios, sus superficies multiplicadas por los radios son como los cubos de dichos radios. Luego *las solideces de dos esferas estan entre* *sí como los cubos de sus radios, ó como los cubos de sus diámetros.*

Escolio. Sea R el radio de una esfera; su superficie será $4 \pi R^2$, y su solidez $4 \pi R^2 \times \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3$. Si llamamos D el diámetro, tendrémos $R = \frac{1}{2}D$, y $R^3 = \frac{1}{8}D^3$: luego la expresion de la solidez será tambien $\frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8}D^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$.

PROPOSICION XVII.

TEOREMA.

La superficie de la esfera es á la superficie total del cilindro circunscrito (comprehendiendo sus bases) como 2: 3. Las solideces de estos dos cuerpos están entre sí en la misma razon.

Sea MPNQ el círculo máxîmo de la esfera, ABCD el quadrado circunscrito. Si hacemos girar al mismo tiempo el semicírculo PMQ y el semi-quadrado PADQ al rededor del diámetro PQ, el semicírculo trazará la esfera, y el semi-quadrado producirá el cilindro circunscrito á ella. Fig. 272.

La altura AD de este cilindro es igual al diámetro PQ, la base del cilindro es igual al círculo máxîmo, pues tiene por diámetro AB = MN: luego la superficie convexâ del cilindro * es igual á la circunferencia del círculo máxîmo multiplicada por su diámetro. Esta medida es la misma que la de la superficie de la esfera *; de donde se deduce que *la superficie de la esfera es igual á la superficie convexâ del cilindro circunscrito.*

* Pr. 4.

* Pr. 10.

Pero la superficie de la esfera es igual á la de quatro círculos máxîmos: luego la superficie convexâ del cilindro es igual tambien á la de quatro círculos máxîmos; si añadimos las dos bases que valen dos círculos máxîmos, la superficie total del cilindro circunscrito será igual á seis círculos máxîmos: luego la superficie de la esfera es á la superficie total del cilindro circunscrito como 4 es á 6, ó como dos es á tres. Esta es la primera parte que nos propusimos demostrar.

En segundo lugar, una vez que la base del cilindro circunscrito es igual á un círculo máxîmo, y su altura al diámetro, la solidez del cilindro será igual al círculo má- * Pr. 1. xîmo multiplicado por el diámetro*. Pero la solidez de la esfera es igual al producro de quatro círculos máxî- * Pr. 6. mos por la tercera parte del radio*, ó, lo que es todo uno, al producto de un círculo máxîmo por $\frac{4}{3}$ del radio, ó $\frac{2}{3}$ del diámetro: luego la esfera es al cilindro circunscrito como 2 es á 3, y por consiguiente las solideces de estos dos cuerpos estan entre sí como sus superficies.

Escolio. Si imaginamos un poliedro cuyas caras toquen todas á la esfera, podremos considerarle como pirámides cuyo vértice comun es el centro de la esfera, y cuyas bases son las diferentes caras del poliedro. Claro está que la altura comun de todas estas pirámides será el radio de la esfera, de modo que cada pirámide será igual á la cara del poliedro que la sirve de base multiplicada por la tercera parte del radio: luego el poliedro entero será igual á su superficie multiplicada por el tercio del radio de la esfera inscrita.

Vemos pues que las solideces de los poliedros circunscritos á la esfera están entre sí como las superficies de estos mismos poliedros. Así la propiedad que hemos demostrado para el cilindro circunscrito es comun á otros infinitos cuerpos.

Se pudiera haber notado igualmente que las superficies de los polígonos circunscritos al círculo están entre sí como sus perímetros.

PROPOSICION XVIII.

PROBLEMA.

Fig. 273. *Suponiendo que el segmento circular* BMD *da una revolucion al rededor del diámetro* AG, *exterior á este seg-*

mento, hallar el valor del sólido engendrado.

Báxense al exe las perpendiculares BE, DF; tírese CI perpendicular á la cuerda BD, y tírense los radios CB, CD.

El sólido descrito por el sector BCA $= \frac{2}{3} \pi \times (CB)^2 \times AE$ *; el sólido descrito por el sector DCA $= \frac{2}{3} \pi \times (CB)^2 \times AF$: luego la diferencia de estos dos sólidos, ó el sólido producido por el sector DCB $= \frac{2}{3} \pi \times (CB)^2 \times (AF - AE) = \frac{2}{3} \pi \times (CB)^2 \times EF$. Pero el sólido trazado por el triángulo DCB tiene por medida $\frac{2}{3} \pi \times (CI)^2 \times EF$ *: luego el sólido descrito por el segmento BMD $= \frac{2}{3} \pi \times EF \times ((CB)^2 - (CI)^2)$. Pero en el triángulo rectángulo CBI tenemos $(CB)^2 - (CI)^2 = (BI)^2 = \frac{1}{4}(BD)^2$: luego el sólido descrito por el segmento BMD tendrá por medida $\frac{2}{3} \pi \times EF \times \frac{1}{4}(BD)^2$, ó $\frac{1}{6} \pi \times (BD)^2 \times EF$.

* Pr. 16.

* Pr. 14.

PROPOSICION XIX.

TEOREMA.

Todo segmento de esfera comprehendido entre dos planos paralelos tiene por medida la semisuma de sus bases multiplicada por su altura, mas la solidez de la esfera de que es diámetro esta misma altura.

Fig. 273.

Sean BE, DF los radios de las bases del segmento, EF su altura, de modo que el segmento esté producido por la revolucion del espacio circular BMDFE al rededor del exe FE. El sólido descrito por el segmento BMD * es igual á $\frac{1}{6} \pi \times (BD)^2 \times EF$, el tronco de cono trazado por el trapecio* BDFE $= \frac{1}{3} \pi \times EF \times ((BE)^2 + (DF)^2 + BE \times DF)$: luego el segmento de esfera, que es la suma de estos dos sólidos, $= \frac{1}{6} \pi \times EF \times (2(BE)^2 + 2(DF)^2 + 2BE \times DF + (BD)^2)$. Pero tirando BO paralela á EF, tendremos $DO = DF - BE$, $(DO)^2 = (DF)^2 - 2DF \times BE + (BE)^2$ *, y por consiguiente $(BD)^2 = (BO)^2 + (DO)^2 = (EF)^2 + (DF)^2 - 2DF \times BE + (BE)^2$. Substituyendo este valor en lugar de $(BD)^2$ en

* Pr. 18.

* Pr. 6.

* 9. 3.

la expresion del segmento, y borrando lo que se destruye, tendremos para solidez del segmento $\frac{1}{6}\pi \times EF \times (3(BE)^2 + 3(DF)^2 + (EF)^2)$, expresion que se descompone en dos partes, la una $\frac{1}{6}\pi \times EF \times (3(BE)^2 + 3(DF)^2)$, ó $EF \times \left(\frac{\pi.(BE)^2 + \pi.(DF)^2}{2}\right)$ es la semisuma de las bases multiplicada por la altura; la otra $\frac{1}{6}\pi \times (EF)^3$ representa la esfera cuyo diámetro es EF*: luego todo segmento de la esfera &c.

* Pr. 14. Escol.

Corolario. Si es nula una de las bases, el segmento de que se trata se transforma en un segmento esférico de una sola base: luego *todo segmento esférico de una base tiene por valor la mitad del cilindro de la misma base y altura, mas la esfera de que es diámetro esta altura.*

Escolio general.

Sea R el radio de la base de un cilindro, H su altura; la solidez del cilindro será $\pi R^2 \times H$, ó $\pi R^2 H$.

Sea R el radio de la base de un cono, H su altura; su solidez será $\pi \times R^2 \times \frac{1}{3}H$, ó $\frac{1}{3}R^2 H$.

Sean A y B los radios de las bases de un cono truncado, H su altura; la solidez del tronco de cono será $\frac{1}{3}\pi H (A^2 + B^2 + AB)$.

Sea R el radio de una esfera, su solidez será $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Sea R el radio de un sector esférico, H la altura de la zona que le sirve de base; la solidez del sector será $\frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Sea P y Q las dos bases de un segmento esférico, H su altura; la solidez de este segmento será $\left(\frac{P+Q}{2}\right) \times H + \frac{1}{6}\pi H^3$.

Si el segmento esférico no tiene mas que una base P, siendo nula la otra, su solidez será $\frac{1}{2}PH + \frac{1}{6}\pi H^3$.

FIN DE LOS ELEMENTOS DE GEOMETRÍA.

NOTAS

Á LOS ELEMENTOS DE GEOMETRÍA.

NOTA I.

Sobre algunos nombres y definiciones.

Se han introducido en esta obra algunas expresiones y definiciones nuevas, con el fin de dar al lenguage geométrico mas exâctitud y precision. Vamos á manifestar estas mudanzas, y proponer otras varias, que podrian desempeñar mas completamenje el mismo objeto.

En la definicion ordinaria del *paralelógramo rectángulo y del quadrado*, se dice que los ángulos de estas figuras son rectos; seria mas exâcto decir que sus ángulos son iguales. Porque suponer que los quatro ángulos de un quadrilátero pueden ser rectos, y aunque los ángulos rectos son iguales entre sí, es suponer proposiciones que necesitan demostrarse. Se evitaria este y otros muchos inconvenientes del mismo género, si, en vez de poner las definiciones, como se acostumbra al principio de un libro, se distribuyesen en el cuerpo del libro, cada una donde está la demostracion que ya supone.

La palabra *paralelógramo*, segun su etimología, significa *líneas paralelas*, y conviene igualmente á la figura de quatro lados que á la de seis, de ocho, &c., cuyos lados opuestos sean paralelos. La voz *paralelepípedo* significa tambien *planos paralelos*, y lo mismo se aplica al sólido de seis caras, que al de ocho, diez, &c., con tal que las opuestas

...

sean paralelas. Parece, pues, que las denominaciones de paralelógramo y de paralelepípedo, que tienen ademas el inconveniente de ser demasiado largas, deberian excluirse de la Geometría. Podrian substituirse en su lugar las de *rombo* y *romboide*, que son mucho mas cómodas, y conservar el nombre de *losango* al quadrilátero, cuyos lados son iguales.

La palabra *inclinacion* debe entenderse en el mismo sentido que la de ángulo; una y otra indican la posicion de dos líneas ó de dos planos que se encuentran, ó que, si se prolongasen, se encontrarian. La inclinacion de dos líneas es nula quando el ángulo es nulo; esto es, quando coinciden ó son paralelas. La inclinacion es mayor quando lo es el ángulo, ó quando forman un ángulo muy obtuso. La propiedad de *ladearse* está tomada en un sentido distinto; una línea se *ladea* tanto mas sobre otra, quanto mas se aparta de la perpendicular.

Euclides y otros Autores llaman freqüentemente *triángulos iguales* á los triángulos que solo lo son en superficie, y *sólidos iguales* á los que solo tienen solideces iguales. Nos ha parecido mejor llamar á estos triángulos ó á estos sólidos, *triángulos ó sólidos equivalentes*, y reservar la denominacion de *triángulos iguales*, *sólidos iguales*, á los que pueden coincidir por superposicion.

Es ademas necesario distinguir en los sólidos y en las superficies curvas dos especies de igualdad, que son distintas una de otra. Con efecto, dos sólidos, dos ángulos sólidos, dos triángulos ó polígonos esféricos, pueden ser iguales en todas las varias partes que los constituyen, sin que por eso coincidan por superposicion. No parece que se ha hecho esta observacion en los libros elementales; y sin embargo, por falta de poner cuidado en ella, ciertas demostraciones, fundadas en la coincidencia de las figuras, carecen de exâctitud. Tales son las demostraciones con que muchos autores pretenden probar la igualdad de los triángulos esféricos en los mismos casos, y del mismo modo que la de los triángulos rectilíneos; y hay de ello sobre todo un exemplo manifiesto, quando Roberto Simson (1), impugnando la demostracion de la proposicion XXVIII, lib. XI de Euclides, comete él mismo la falta de fundar su demostracion en una coincidencia que no exîste. Hemos creido por con-

(1) Véase la obra de este autor intitulada ***Euclidis Elementorum libri sex, etc. Glasquæ***, 1756.

siguiente deber dar un nombre particular á esta igualdad, que no estriva en la coincidencia, y la hemos llamado *igualdad por simetría*, y las figuras que se hallan en este caso, las denominamos figuras *simétricas*.

Así que las denominaciones de figuras *iguales*, figuras *simétricas*, figuras *equivalentes*, se refieren á cosas distintas, y no deben confundirse en una sola denominacion.

En las proposiciones concernientes á los polígonos, ángulos sólidos y poliedros, hemos excluido absolutamente todos los que tuviesen ángulos entrantes. Porque ademas que conviene limitarse en los elementos á las figuras mas sencillas, si no se verificase esta exclusion, ó no serian verdaderas ciertas proposiciones, ó seria preciso modificarlas. Nos hemos, pues, ceñido á considerar las líneas y superficies que llamamos *convexâs*, y que son tales, que una línea recta no puede cortarlas en dos puntos.

Hemos empleado con freqüencia la expresion, *producto de dos ó mas líneas*, por la qual entendemos el producto de los números á que son iguales estas líneas, valuándolas segun una unidad lineal tomada á discrecion. Una vez fixado el sentido de esta expresion, no hay dificultad alguna en usarla quando sea del caso. Lo mismo se entenderia lo que significa el producto de una superficie por una línea, de una superficie por un sólido, &c.: basta haber dicho, de una vez para siempre, que estos productos se consideran ó deben considerarse como productos numéricos, cada uno de la especie que le conviene. Así el producto de una superficie por un sólido no es otra cosa que el producto de un número de unidades sólidas por un número de unidades superficiales.

Regularmente en el lenguage ó en los escritos se usa la palabra *ángulo* para denotar el punto de interseccion de las líneas que le forman: esta expresion es viciosa. Seria mas claro y mas exacto expresar por un nombre particular, como el de *vértices*, v. gr., los puntos situados en los extremos de los ángulos de un polígono ó de un poliedro. De este modo se debe entender la denominacion de *vértices de un poliedro*, de que hemos usado.

Hemos seguido la definicion ordinaria de *figuras rectilíneas semejantes*; pero haremos ver que encierra condiciones superfluas. Porque para construir un polígono, cuyo número de lados sea n, es preciso desde luego conócer un lado, y saber ademas la posicion de los vértices de los ángulos situados fuera de este lado. Pero el número de estos ángulos es $n-2$, y la posicion de cada vértice exîge dos datos: de donde se deduce que el número total de datos necesarios para construir un polígono de n lados es $1+2n-4$, ó $2n-3$. Pero en el polígono semejante hay un lado arbitrario; así el número de condiciones que se requieren para que un polígono sea semejante á otro dado, es $2n-4$. Pero la definicion ordinaria exîge, 1.° que los ángulos sean iguales cada uno al suyo, y esto causa n condiciones; 2.° que los lados homólogos sean proporcionales, lo que causa $n-1$ condiciones. Hay, pues, en todo $2n-1$ condiciones, y esto hace que haya tres de mas. Para evitar este inconveniente, se podria descomponer la definicion en otras dos, así:

1.° *Dos triángulos son semejantes quando tienen dos ángulos iguales cada uno al suyo.*

2.° *Dos polígonos son semejantes quando en uno y en otro se pueden formar igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.*

Pero para que esta última definicion esté exênta de condiciones superfluas, es menester que el número de triángulos sea igual al número de lados del poliedro ménos dos, y esto puede suceder de dos maneras. Se pueden tirar diagonales desde dos ángulos homólogos á los ángulos opuestos, y entónces todos los triángulos formados en cada polígono tendrá un vértice comun, y su suma será igual al polígono. O tambien se puede suponer que todos los triángulos formados en un polígono tienen por base comun un lado de dicho polígono, y por vértices los de los diferentes ángulos opuestos á esta base. Siendo en uno y en otro caso $n-2$ el número de triángulos formados de ambas partes, el número de las condiciones de su semejanza será $2n-4$, y la definicion nada tendrá de superflua. Sentada ya esta nueva definicion, la otra será un teorema, que se podrá demostrar inmediatamente.

Si la definicion de las figuras rectilíneas semejantes es imperfecta en los libros elementales, la de los *sólidos poliedros semejantes*, lo es mucho mas todavia. En Euclides pende esta definicion de un teorema que no está demostrado; y en otros autores tiene el inconveniente de ser demasiado redundante. Hemos desechado, pues, estas definiciones de los sólidos semejantes, y hemos substituido otra, fundada en los principios que acabamos de exponer. Pero como hay otras muchas observaciones que hacer sobre este particular, las reservamos para una nota particular, que se pondrá luego.

La definicion de la *perpendicular á un plano* puede considerarse como un teorema; la de la *inclinacion de dos planos* necesita tambien comprobarse con algun razonamiento, y otras muchas se hallan tambien en igual caso. Por esta razon, conservando las definiciones segun el uso antiguo, hemos cuidado de citar las proposiciones en que han sido ya demostradas; y á veces nos hemos contentado con añadir una sucinta aclaracion, que nos ha parecido suficiente.

El *ángulo* formado por el encuentro *de dos planos*, y el *ángulo sólido* formado por muchos planos que concurren en un mismo punto, son cantidades, cada una de su especie, á las quales seria tal vez muy del caso dar nombres particulares. De otro modo es dificil evitar la obscuridad y las circunlocuciones quando se habla de la colocacion de los planos que componen la superficie de un poliedro; y como hasta ahora se ha cultivado poco la teórica de estos sólidos, hay ménos inconveniente en introducir expresiones nuevas, si las reclama la naturaleza de las cosas.

Por mi voto se llamaria *esquina* el ángulo formado por dos planos; la *arista* de la esquina seria la comun interseccion de los dos planos. Se señalaria la esquina con quatro letras, de las quales las dos medias corresponderian á la arista; y entónces una *esquina recta* seria el ángulo formado por dos planos perpendiculares entre sí. Quatro esquinas rectas ocuparian todo el espacio angular sólido alrededor de una línea dada. Esta denominacion nueva no impediria que la medida de la esquina fuese siempre el ángulo formado por las dos perpendiculares tiradas en cada plano á un mismo punto de la arista ó interseccion comun.

Finalmente, se podria llamar *angloide* el espacio angular comprehendido entre muchos planos, que concurren en un mismo punto. El angloide se señalaria por la letra del vértice acompañada de tantas, como aristas reunidas hay en el vértice; el *angloide recto* estaria formado por tres planos perpendiculares entre sí; ocho angloides rectos ocuparian todo el espacio angular esférico alrededor de un punto, y dos angloides rectos, unidos por una cara comun, formarian una esquina recta.

Basta un dato para determinar la esquina, y se necesitan muchos para determinar el angloide. En general, todo angloide intercepta, en la superficie de una esfera descrita desde su vértice como centro, un polígono esférico; y si llamamos n el número de lados de este polígono, el número de datos necesarios para determinar el polígono y el angloide será $2n - 3$. Por lo que mira al espacio angular, que es el grandor efectivo de cada angloide, es proporcional al área del polígono esférico interceptado.

NOTA II.

Acerca de un modo de demostrar analíticamente la prop. XX del libro primero, y los demas teoremas fundamentales de la Geometría.

Se demuestra inmediatamente por la superposicion, y sin ninguna proposicion preliminar, que *dos triángulos son iguales quando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales cada uno al suyo.* Llamemos p el lado de que se trata, A y B los dos ángulos adyacentes, C el tercer lado. Es preciso, pues, que el ángulo C esté enteramente determinado, quando se conocen los ángulos A y B con el lado p; porque si pudiesen corresponder muchos ángulos C á los tres datos A, B, p, habria otros tantos triángulos diferentes, que tendrian igual un lado adyacente á dos ángulos iguales, lo que es imposible: luego el ángulo C debe ser una funcion determinada de las tres cantidades A, B, p; esto se expresa así $C = \varphi : (A, B, p)$.

Sea el ángulo recto igual á la unidad, entónces los ángulos A, B, C, serán números comprehendidos entre o y 2; y ya que $C = \varphi : (A, B, p)$, digo que la línea p no debe entrar en la funcion φ. En efecto, se ha visto que C debe quedar enteramente determinada con solo los datos A, B, p, sin mas ángulo ni línea alguna; pero la línea p es heterogenea con los números A, B, C; y si tuviesemos una equacion qualquiera entre A, B, C, p, se podria sacar el valor de p en A, B, C, de donde resultaria que p es igual á un número, lo que es un absurdo: luego p no puede entrar en la funcion φ, y tenemos simplemete $C = \varphi : (A, B)$...(1).

(1) Se ha objetado contra esta demostracion que, si se aplicase al pie de la letra á los triángulos esféricos, resultaria que dos ángulos conocidos bastan para determinar el tercero, lo que no se verifica en estos triángulos. A esto se responde, que en los trián-

Esta fórmula prueba ya, que si dos ángulos de un triángulo son iguales á otros dos de otro triángulo, los terceros deben ser iguales: y sentado ya esto, es fácil llegar al teorema de que tratamos.

Sea ABC un triángulo rectángulo en A; desde el punto A tírese á la hypotenusa la perpendicular AD. Los ángulos B y D del triángulo ABD son iguales á los ángulos B y A del triangulo BAC: luego, segun lo que acabamos de demostrar, los terceros BAD y C son iguales. Por la misma razon el ángulo DAC = B: luego BAD + DAC ó BAC = B + D; pero el ángulo BAC es recto: luego *los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo valen juntos un recto.*

Sea ahora BAC un triángulo qualquiera, y BC un lado que no sea menor que cada uno de los otros dos. Si desde el ángulo opuesto A se tira á BC la perpendicular AD, esta perpendicular caerá dentro del triángulo ABC, y lo dividirá en dos triángulos rectángulos BAD, DAC; pero en el triángulo rectángulo BAD los dos ángulos BAD, ABD valen juntos un recto; y en el triángulo rectángulo DAC los dos ángulos DAC, ACD valen tambien un recto. Luego los quatro reunidos, ó solo los tres BAC, ABC, ACB valen juntos dos ángulos rectos: luego *en todo triángulo la suma de sus tres ángulos es igual á dos rectos.* Fig. 5.

Por aquí se vé que este teorema, considerado *á priori*, no depende de una serie de proposiciones, y que se deduce inmediatamente del principio de la homogeneidad, principio que debe verificarse en toda relacion entre qualesquiera cantidades. Pero sigamos y hagamos ver que se puede sacar del mismo orígen los demas teoremas fundamentales de la Geometría. Fig. 2.

Conservemos las mismas denominaciones que en el caso

gulos esféricos hay un elemento mas que en los triángulos planos, y este elemento es el radio de la esfera de que no se debe hacer abstraccion. Sea, pues, r el radio, entónces en vez de tener $C = \varphi(A, B, p)$, tendremos $C = \varphi(A, B, p, r)$, ó solamente $C = \varphi\left(A, B, \frac{p}{r}\right)$, en virtud de la ley de los homogeneos. Pero una vez que la razon $\frac{p}{r}$ es un número, igualmente que A, B, C, no hay inconveniente en que $\frac{p}{r}$ no se halle en la funcion φ, y entónces no se puede deducir $C = \varphi(A, B)$.

anterior, y ademas llamemos m el lado opuesto al ángulo A′ y n el lado opuesto al ángulo B. La cantidad m debe quedar enteramente determinada solo con las cantidades A, B, p: luego m es una funcion de A, B, p, y lo es tambien $\frac{m}{p}$; de modo que podemos hacer $\frac{m}{p} = \Psi : (A, B, p)$.

Pero $\frac{m}{p}$ es un número lo mismo que A y B: luego la funcion Ψ no debe contener la línea p, y tenemos solo $\frac{m}{p} = \Psi : (A, B)$, ó $m = p\ \Psi : (A, B)$. Del mismo modo tenemos $n = p\ \Psi : (B, A)$.

Sea ahora otro triángulo formado con los mismos ángulos A, B, C, á los quales estan respectivamente opuestos los lados m', n', p'. Una vez que A y B son constantes, tendremos en este nuevo triángulo $m' = p' \psi (A, B)$, y $n' = p' \psi : (B, A)$. Luego $m : m' :: n : n' :: p : p'$. Luego *en los triángulos equiángulos, los lados opuestos á los ángulos iguales son proporcionales.*

La proposicion del quadrado de la hypotenusa, sabemos que es una serie de triángulos equiángulos. He aquí tres proposiciones fundamentales de la Geometría, la de los tres ángulos de un triángulo, la de los triángulos equiángulos, y la del quadrado de la hypotenusa, que se deducen inmediatamente y con mucha facilidad de la consideracion de las funciones. Por el mismo camino se pueden demostrar muy sucintamente las proposiciones pertenecientes á las figuras y sólidos semejantes.

Sea ABCD un polígono qualquiera; sobre el lado AB, como base, fórmense tantos triángulos ABC, ABD, &c., como ángulos C, D, E, &c., hay hácia fuera. Sea la base $AB = p$; sean A y B los dos ángulos del triángulo ABC, adyacentes al lado AB; sean A′ y B′ los dos ángulos del triángulo ABD adyacentes al mismo lado AB, y así sucesivamente. La figura ABCDE quedará enteramente determinada, si se conoce el lado p con los ángulos A, B, A′, B′, A″, B″, &c., y el número de los datos será en todo $2n - 3$, siendo n el número de los lados del polígono. Esto sentado, un lado ó una línea qualquiera x, tirada á discrecion en el polígono, será una funcion de estos datos, y como $\frac{x}{p}$ debe ser un número, se podrá suponer $\frac{x}{p} = \Psi :$ (A, B, A′, B′, &c.), ó $x = p\ \Psi :$ (A, B, A′, B′, &c.),

y en la funcion Ψ no se hallará p. Si se forma un segundo polígono con los mismos ángulos A, B, A′, B′, &c., y otro lado p', tendremos para la línea x', correspondiente á su homóloga x, el valor $x=p'\,\Psi$: (A, B, A′, B′, &c.): luego $x : x' :: p : p'$. Las figuras así construidas se pueden definir *figuras semejantes*: luego *en las figuras semejantes las líneas homólogas son proporcionales*. Así, no solo los aldos homólogos, las diagonales homólogas, sino tambien las líneas terminadas de un mismo modo en ambas figuras, estan entre sí como otras dos líneas homólogas qualesquiera.

Llamemos S la superficie del primer polígono: esta superficie es homogenea al quadrado p^2; luego es menester que $\frac{S}{p^2}$ sea un número que solo contenga los ángulos A, B, A′, B′, &c.; de modo que tendrémos $S'=p'^2\,\varphi$: (A, B, A′, B′, &c.). Luego $S : S' :: p^2 : p'^2$: luego *las superficies de las figuras semejantes siguen la razon de los quadrados de sus lados homólogos.*

Tratemos ahora de los poliedros. Se puede suponer que se determina una cara por medio de un lado conocido p y de muchos ángulos A, B, C, &c. Ahora los vértices de los ángulos sólidos, fuera de esta base, estarán determinados cada uno por medio de tres datos, que se pueden mirar como otros tantos ángulos; de modo que la determinacion entera del poliedro depende de un lado p, y de muchos ángulos A, B, C, &c., cuyo número varía segun la naturaleza del poliedro. Esto sentado, una línea que une dos vértices, ó, mas generalmente, toda línea x tirada determinadamente en el poliedro, será una funcion de los datos p, A, B, C; y como $\frac{x}{p}$ debe ser un número, la funcion igual á $\frac{x}{p}$ solo contendrá los ángulos A, B, C, &c., y podremos suponer $x=p\varphi$: (A, B, C, &c.) La superficie del sólido es homogenea á p^2, y así puede representarse por $p^2\,\Psi$: (A, B, C, &c.); su solidez es homogenea á p^3, y puede representarse por $p^3\,\Pi$: (A, B, C, &c.), siendo independientes de p las funciones señaladas por Ψ y Π.

Constrúyase un segundo sólido con los mismos ángulos A, B, C, &c., y un lado p' diferente de p; á los sólidos construidos de este modo llamarémos sólidos semejantes; y sentado ya esto, la línea que era $p\,\varphi$: (A, B, C, &c.), ó simplemente $p\,\varphi$ en un sólido, será $p'\,\varphi$ en el otro; y así la superficie que era $p^2\,\Psi$ en el uno, será p'^2 en el otro; la solidez, que en uno era $p^3\,\Pi$, será $p'^3\,\Pi$ en el otro. Luego 1.° *los sólidos semejantes tienen los lados ó líneas homólogas proporcionales*; 2.° *sus superficies son como los quadrados de los lados homólogos*; 3.° *sus solideces como los cubos de estos mismos lados.*

Estos mismos principios se aplican con facilidad al círculo. Sea c la circunferencia, y s la superficie del círculo, cuyo radio es r. Ya que no puede haber dos círculos desiguales trazados con un mismo radio, las cantidades $\frac{c}{r}$ y $\frac{s}{r^2}$ deben ser funciones determinadas de r; pero como estas cantidades son números, no debe hallarse en su expresion la línea r; y así tendremos $\frac{c}{r}=\alpha$; y $\frac{s}{r^2}=\beta$, siendo α y β números constantes. Sea c' la circunferencia, y s' la superficie de otro círculo, cuyo radio es r', y tendremos tambien $\frac{c'}{r'}\ \alpha$, y $\frac{s'}{r'^2}=\beta$. Luego $c : c' :: r : r' :: s : s' :: r^2 : r'^2$; luego *las circunferencias de los círculos son como los radios, y sus superficies como los quadrados de los radios.*

Consideremos un sector, cuyo radio sea r, y A el ángulo del centro; sea x el arco que termina el sector, y la superficie de dicho sector. Una vez que el sector está enteramente determinado, conociendo r y A, es menester que x é y sean funciones determinadas de r y A: luego $\frac{x}{r}$ é $\frac{y}{r^2}$ son semejantes funciones. Pero $\frac{x}{r}$ es un número, igualmente que $\frac{y}{r^2}$: luego en estas cantidades no debe entrar r, y son simplemente funciones de A, de modo que tendremos $\frac{x'}{r'}=\varphi\,A$, é $\frac{y'}{r'^2}=\Psi : A$. Sean x' é y' el arco, y la superficie de otro sector, cuyo ángulo es A, y el radio r'; á estos dos sectores llamaremos *sectores semejantes*; y ya que el ángulo A es el mismo en ambas partes, tendremos $\frac{x'}{r'}=\varphi : A$, é $\frac{y'}{r'^2}=\Psi : A$: luego $x : x' :: r : r'$: é $y : y' :: r^2 : r'^2$; luego *los arcos semejantes, ó los arcos de sectores semejantes, son proporcionales á los radios, y los sectores mismos son proporcionales á los quadrados de los radios.*

Es claro que del mismo modo se probaria, que las esferas son como los cubos de sus radios.

En todo lo que hemos tratado hasta ahora se supone, que las superficies se miden por el producto de dos líneas, y las solideces por el producto de tres, cosa muy fácil de demostrar tambien por medio del analísis. Considéremos un rectángulo, cuyas dimensiones son p y q; y representemos su superficie, que es una funcion de p y q, por $\varphi : (p, q)$. Si se considera otro rectángulo, cuyas dimensiones son $p + p'$ y q, es claro que este rectángulo está compuesto de otros dos, uno que tiene por dimensiones p y q, y otro que tiene por dimensiones p' y q; de modo que tendremos $\varphi : (p + p', q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (p', q)$. Sea $p' = p$, resulta $\varphi\ (2p, q) = 2\ \varphi\ (p, q)$. Sea $p' = 2p$, tendremos $\varphi(3p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(2p, q) = 3\varphi(p, q)$. Sea $p' = 3p$, sale $\varphi\ (4p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(3p, q) = 4\varphi\ (p, q)$. Luego, en general, si k es un número entero qualquiera, tendremos $\varphi(kp, q) = k. \varphi(p, q)$, ó $\frac{\varphi(p, q)}{p} = \frac{\varphi(kp, q)}{kp}$.
De aquí resulta que $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ es una funcion de p, que no se altera poniendo en lugar de p un multiplo qualquiera kp: luego esta funcion no depende de p, y solo debe contener q. Pero por una razon semejante $\frac{\varphi(p, q)}{q}$ debe ser independiente de p: luego $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ no contiene ni p ni q, y así esta cantidad debe reducirse á una constante α Luego tendremos $\varphi(p, q) = \alpha pq$; y como no hay inconveniente alguno en hacer $\alpha = 1$, resulta $\varphi(p, q) = pq$; así la superficie de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.

Se demostraria, de un modo enteramente semejante, que la solidez de un paralelépipedo rectángulo, cuyas dimensiones son p, q, r, es igual al producto pqr de sus tres dimensiones.

Concluimos observando, que la consideracion de las funciones, que suministra de este modo una demostracion sencillísima de las proposiciones fundamentales de Geometría, ha sido empleada ya con muy buen éxito para la demostracion de los principios fundamentales de la Mecánica. *Véase* las Memorias de Turin, tomo II.

NOTA III.

Sobre la aproximacion de la proposicion XVI, lib. IV.

Dado el caso de haber hallado un radio excedente y un deficiente, que coinciden en las primeras cifras, se puede acabar muy pronto el cálculo por medio de una fórmula algebráica.

Sea a el radio deficiente, y b el excedente, cuya diferencia es corta; sean a' y b' los radios siguientes que se deducen por las fórmulas $b' = \sqrt{ab}$, $a' = \sqrt{\left(a.\ \frac{a+b}{2}\right)}$.

Lo que buscamos es el último término de la série a, a', a'', &c., que es al mismo tiempo el de la série b, b', b'', &c. Llamemos á este último término x, y sea $b = a\ (1 + \omega)$; podremos suponer $x = a\ (1 + P\omega + Q\omega^2 + \&c.)$, siendo P y Q coeficientes indeterminados. Pero los valores de b' y a' dan

$$b' = a\ (1 + \tfrac{1}{2}\ \omega - \tfrac{1}{8}\ \omega^2 + \&c.)$$

$$a' = a\ (1 + \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{32}\ \omega^2 + \&c.)$$

Y si hacemos igualmente $b' = a'\ (1 + \omega')$, tendremos

$$\omega' = \tfrac{1}{4}\ \omega - \tfrac{5}{32}\omega^2\ \&c.$$

Pero el valor x debe ser el mismo, aunque la serie a, a', a'', &c., empiece por a ó por a': luego resulta $a\ (1 + P\omega + Q\omega^2 + \&c.) = a'(1 + P\omega' + Q\ \omega'^2\ \&c.)$ Substituyendo en esta equacion los valores de a' y de ω' en a y ω, y comparando los términos semejantes, deduciremos $P = \frac{1}{3}$, $Q = -\frac{1}{15}$: luego

$$x = a\ (1 + \tfrac{1}{3}\omega - \tfrac{1}{15}\omega^2).$$

Si los radios a y b coinciden en la primera mitad de sus cifras, se podrá desechar el término ω^2, y el valor anterior se reducirá á $x = a\ (1 + \frac{1}{3}\ \omega) = a + \frac{b - a}{3}$ Así haciendo $a = 1{,}1282657$, y $b = 1{,}1285063$, se deducirá inmediatamente $x = 1{,}1283792$.

Si los radios a y b no coinciden sino en la primera tercera parte de sus cifras, será preciso tomar los tres terminos de la fórmula antecedente; así haciendo $a = 1,1265639$, y $b = 1,1320149$, resulta $x = 1,1283791$.

Se podria suponer que a y b estan todavia ménos cerca uno de otro; pero en tal caso seria preciso calcular el valor de x con mayor número de término.

La aproximacion de la prop. XIV, que es de Santiago Gregory, es susceptible de semejantes abreviaciones. Citamos la obra de este autor, á que se puede acudir, intitulada: *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, obra de gran mérito para el tiempo en que ha salido á luz.

NOTA IV.

Donde se demuestra que la razon de la circunferencia al diámetro y su quadrado son números irracionales.

Consideremos la serie infinita

$$1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{z.z+1} + \frac{1}{2.3}.\frac{a^3}{z.z+1.z+2} + \&c.$$

y supongamos que $\varphi : z$ representa su suma. Si ponemos $z+1$ en lugar de z, $\varphi(z+1)$ será igualmente la suma de la serie.

$$1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{z+1.z+2} + \frac{1}{2.3}.\frac{a^3}{z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Retemos estas dos series, término por término, una de otra, y tendrémos $\varphi : z - \varphi : (z+1)$ para suma del residuo, que será

$$\frac{a}{z.z+1} + \frac{a^2}{z.z+1.z+2} + \frac{1}{2}.\frac{a^3}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Pero esta resta puede escribirse en esta forma.

$$\frac{a}{z.z+1}.\left(1 + \frac{a}{z+2} + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{z+2.z+3} + \&c.;\right)$$

y entónces se reduce á $\frac{a}{z.z+1}\varphi : (z+2)$. Luego tendremos generalmente

$$\varphi : z - \varphi : (z+1) = \frac{a}{z.z+1}\varphi : (z+2).$$

Dividamos esta eqüacion por $\varphi : (z+1)$, y, para simplificar

el resultado, sea $\psi : z$ una nueva funcion de z tal que $\psi : z = \frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : z}$ Entónces podrémos poner $\frac{a}{z \psi : z}$ en vez de $\frac{\varphi : z}{\varphi : (z+1)}$, y $\frac{(z+1) \psi : (z+1)}{a}$ en lugar de $\frac{\varphi : (z+2)}{\varphi : (z+1)}$.
Hecha la substitucion resulta

$$\psi : z = \frac{a}{z + \psi : (z+1)}.$$

Pero poniendo sucesivamente en esta eqüacion $z+1$, $z+2$, &c., en lugar de z saldrá

$$\psi : (z+1) = \frac{a}{z + 1 + \psi : (z+2)},$$

$$\psi : (z+2) = \frac{a}{z + 2 + \psi : (z+3)}, \text{ \&c.}$$

Luego el valor de Ψz puede expresarse así en fraccion continua:

$$\psi : z = \cfrac{a}{z + \cfrac{a}{z + 1 + \cfrac{a}{z + 2 + \text{\&c.}}}}$$

Recíprocamente, esta fraccion continua prolongada al infinito, tiene por suma $\Psi : z$, ó su igual $\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : z}$; y esta suma, descifrada en series comunes, es

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \cdot z+2} \text{ \&c.}}{1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z \cdot z+1} + \text{\&c.}}$$

Sea ahora $z : \frac{1}{2}$, la fraccion continua será

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\&c.}}}$$

en la qual los numeradores, excepto el primero, son todos iguales á $4a$, y los denominadores forman la serie de los números impares 1, 3, 5, 7, &c. Tambien se puede expresar el valor de esta fraccion contínua de este modo

$$2a.\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3..7}+\&c.}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3...6}+\&c.}$$

Pero estas series se refieren á series conocidas, y sabemos que si representamos por e el número cuyo logaritmo hiperbólico es 1, la expresion anterior se reduce á

$\frac{e^{\sqrt{2a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}.\sqrt{a}$; de modo que en general tenemos

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}.2\sqrt{a}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\&c.}}}$$

De aquí resultan dos fórmulas principales segun sea a positivo ó negativo. Sea $4a = x^2$, tendrémos

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \&c.}}}$$

Sea ahora $4a = -x^2$, y en virtud de la fórmula conocida $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}.\ \text{tang.}\ x$, tendremos

$$\text{tang.}\ x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \&c.}}}}$$

Esta es la fórmula que servirá de base á nuestra demostracion. Pero ántes de todo, es preciso demostrar los dos lemas siguientes.

LEMA I. *Sea una fraccion contínua*

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \&c.}}},$$

prolongada al infinito, en la qual todos los números m, n, m', n', &c. *son enteros positivos ó negativos; si se supone que las fracciones componentes* $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, &c. *sean todas menores que la unidad: digo que el valor total de la fraccion contínua será necesariamente un número irracional.*

Digo desde luego que este valor será menor que la unidad. Con efecto, sin disminuir la generalidad de la fraccion contínua, se pueden suponer positivos todos los denominadores n, n', n'', &c.; si tomamos un solo término de la serie propuesta, tendrémos por hipótesis $\frac{m}{n}<1$. Si se toman los dos primeros, por ser $\frac{m'}{n'}<1$, es claro que $n+\frac{m'}{n'}$ es mayor que $n-1$; pero $m<n$, y por ser ambos enteros, m será tambien menor que $n+\frac{m'}{n'}$: luego el valor que resulta de los términos

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'}}$$

será menor que la unidad.

Calculemos tres términos de la fraccion contínua propuesta; y desde luego, segun lo que acabamos de ver, el valor de la parte

$$\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}$$

será menor que la unidad. Llamemos á este valor ω, y es claro que $\frac{m}{n+\omega}$ será todavía menor que la unidad: luego el valor que resulta de los tres términos

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''}}}$$

es menor que la unidad. Continuando el mismo razonamiento se verá que, sea qual fuere el número de términos que se calculan de la fraccion contínua propuesta, el valor que resulta siempre es menor que la unidad: luego el valor total de la fraccion continuada al infinito, es igualmente menor que la unidad. Solo podria ser igual á la unidad en el caso de que la fraccion propuesta tuviese esta forma.

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\text{\&c.}}}};$$

en qualquiera otro caso siempre será menor.

Esto sentado, si se niega que el valor de la fraccion contínua propuesta sea igual á un número irracional, supongamos que es igual á un número racional, y sea este número $\frac{B}{A}$, siendo B y A enteros qualesquiera; tendremos pues

$$\frac{B}{A}=\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{\&c.}}}}$$

Sean C, D, E, &c. cantidades indeterminadas tales que tengamos

$$\frac{C}{B}=\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\text{\&c.}}}}$$

$$\frac{D}{C}=\cfrac{m''}{n''+\cfrac{m'''}{n'''+\cfrac{m^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}}+\text{\&c.}}}}$$

y así al infinito. Como estas diversas fracciones tienen todos sus términos menores que la unidad, sus valores ó sumas $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}, \frac{E}{D}$, &c. serán tambien menores que la unidad, segun lo que acabamos de demostrar; y así tendremos $B < A$, $C < B$, $D < C$, &c., de modo que la serie A, B, C, D, E, &c. es decreciente al infinito. Pero el encadenamiento de las fracciones contínuas de que se trata dá

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{n+\frac{C}{B}}\text{; de donde resulta } C=m\,A-n\,B,$$

$$\frac{C}{B}=\frac{m'}{n'+\frac{D}{C}}\text{; de donde resulta } D=m'\,B-n'\,C,$$

$$\frac{D}{C}=\frac{m''}{n''+\frac{E}{D}}\text{; de donde resulta } E=m''\,C-n''\,D,$$

&c. &c.

Y una vez que los dos primeros números A y B son enteros por suposicion, se sigue que todos los demas C, D, E, &c., que hasta ahora eran indeterminados, son tambien números enteros. Pero es una contradicion manifiesta que una serie infinita A, B, C, D, D, E, &c. sea á un tiempo decreciente y compuesta de números enteros; porque ademas ninguno de los números A, B, C, D, E, &c. puede ser cero, pues la fraccion contínua propuesta se extiende al infinito, y así las sumas representadas por $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, &c. deben siempre valer algo. Luego es absurdo suponer que la fraccion contínua propuesta es igual á una cantidad racional $\frac{B}{A}$: luego esta suma es por precision un número irracional.

LEMA II. *Sentadas las mismas cosas, si las fracciones componentes* $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, &c. *son de un valor qualquiera al principio de la serie, pero despues de un cierto intervalo son constantemente menores que la unidad; digo que la fraccion contínua propuesta, suponiendo siempre que se extiende al infinito, tendrá un valor irracional.*

Porque, si contando desde $\frac{m'''}{n'''}$ por exemplo, todas las fracciones $\frac{m'''}{n'''}$, $\frac{m^{IV}}{n^{IV}}$, $\frac{m^{V}}{n^{V}}$, &c. al infinito, son menores que la unidad, entónces, segun el lema 1, la fraccion contínua

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{IV}}{n^{IV} + \cfrac{m^{V}}{n^{V} + \&c.}}}$$

tendrá un valor irracional. Llamemos á este valor ω, y la fraccion contínua propuesta será

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega.}}}$$

Pero si hacemos succesivamente

$$\frac{m''}{n''+\omega} = \omega', \frac{m'}{n'+\omega'} = \omega'', \frac{m}{n+\omega''} = \omega''',$$

es claro que, siendo ω irracional, todas las cantidades ω', ω'', ω''' deben serlo tambien. Pero la última ω''' es igual á la fraccion contínua propuesta: luego el valor de esta es irracional.

Ahora podemos, volviendo á nuestro asunto, demostrar esta proposicion general.

TEOREMA.

Si un arco es conmensurable con el radio, su tangente te será inconmensurable con el mismo radio.

En efecto, sea el radio $=1$, y el arco $x = \frac{m}{n}$, siendo m y n números enteros; la fórmula arriba hallada dará, haciendo la substitucion,

$$\text{tangente } \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \&c.}}}}$$

Pero esta fraccion contínua está en el caso del lema II; porque es claro que los denominadores $3n$, $5n$, $7n$, &c. van contínuamente en aumento, miéntras el numerador m^2 permanece siempre el mismo, y así las fracciones componentes serán muy pronto menores que la unidad: luego el valor de tang. $\frac{m}{n}$ es irracional: luego *si el arco es conmensurable con el radio, su tangente será inconmensurable.*

De aquí resulta, como consecuencia inmediata, la proposicion que da motivo á esta nota. Sea π la semicircunferencia, cuyo radio es 1; si π fuese racional, el arco $\frac{\pi}{4}$ lo seria tambien, y por consiguiente su tangente deberia ser irracional; pero sabemos, al contrario, que la tangente del arco $\frac{\pi}{4}$ es igual al radio: luego π no puede ser irracional. Luego *la razon de la circunferencia al diámetro es un número irracional* (1).

Es probable que el número π no está comprehendido entre las cantidades irracionales algebráicas, esto es, que no puede ser la raiz de una equacion algebráica de un número finito de términos, cuyos coeficientes son racionales; pero parece muy dificil de demostrar rigurosamente esta proposicion: lo que haremos será probar que el quadrado de π es todavía un número irracional.

Con efecto, si en la fraccion contínua que expresa tang. x, hacemos $x = \pi$, á causa de ser tang. $\pi = 0$, debemos tener

(1) Lambert fué el que demostró esta proposicion por la primera vez, en las memorias de Berlin, año 1761.

$$\varpi = 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \&c.}}}$$

Pero si π fuese racional y tuviesemos $\pi^2 = \frac{m}{n}$, siendo m y n enteros, resultaria

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9n - \cfrac{m}{11 - \&c.}}}}$$

Pero se ve claramente que esta fraccion contínua está todavia en el caso del lema II: luego su valor es irracional, y no puede ser igual al número 3. Luego *el quadrado de la razon de la circunferencia al diámetro es un número irracional.*

NOTA V.

Donde se da la resolucion analítica de diversos problemas pertenecientes al triángulo, al quadrilátero, al paralelepípedo y á la pirámide triangular.

PROBLEMA I.

Dados los tres lados de un triángulo, hallar su superficie, el radio del círculo inscrito, y el radio del círculo circunscrito.

Fig. 3. Sean los lados $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Si desde el vértice A se tira á su lado opuesto BC la perpendicular AD, tendremos* $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2BC \times BD$: luego $BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a2}$. Este valor da $(AB)^2 - (BD)^2$, ó $(AD)^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b}{2a}\right) =$

* Pr. 12. lib. 3.

$\frac{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)}{4a^2}$: luego $AD =$

$\frac{\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2]}}{2a}$. Sea S la área del triángulo, tendremos $S = \frac{1}{2} BC \times AD$: luego

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2]} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4)}.$$

Esta fórmula puede reducirse todavia á otra forma mas cómoda para el cálculo logarítmico; y para esto es preciso observar que la cantidad $4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2$ es el producto de los dos factores $2ac + (a^2+c^2-b^2)$ y $2ac - (a^2+c^2-b^2)$ el primero igual á $(a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b)$, y el segundo igual á $b^2 - (a-c)^2 = (b+a-c)(b-a+c)$: luego tendremos

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}.$$

En fin, si hacemos $\frac{a+b+c}{2} = p$, que da $a+b+c = 2p$, $a+b-c = 2p-2c$, $a+c-b = 2p-2b$, $b+c-a = 2p-2a$, tendremos mas simplemente todavia

$$S = \sqrt{(p.\,p-a.\,p-b.\,p-c)}.$$

Por donde se ve que para hallar la superficie de un triángulo cuyos tres lados son dados, se debe tomar la semisuma de estos tres lados, de esta semisuma restar succesivamente cada uno de los lados, lo que dará tres residuos ó restas, multiplicar estas tres restas entre sí y por la semisuma de los lados, y finalmente extraer la raiz quadrada del producto, cuya raiz será la superficie ó área del triángulo.

Sean ahora u el radio del círculo inscrito al triángulo, y z el radio del círculo circunscrito; tendremos, segun la proposicion XXXII, lib. III,

$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{S}$, $u = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{S}{p}$: luego substituyendo el valor hallado de S, será

$$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{(p.\,p-a.\,p-b.\,p-c.)}},\quad u = \sqrt{\left(\frac{p-a.\,p-b.\,p-c}{p}\right)}.$$

PROBLEMA II.

Dados los quatro lados de un quadrilátero inscrito, hallar el radio del círculo, la superficie del quadrilátero y sus ángulos.

Fig. 4. Sean los lados dados AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, y las diagonales incógnitas AC $= x$, BD $= y$. Tendremos, segun el teorema 33, lib. III, $xy = ac + bd$, y $\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$; de donde se saca

$$x = \sqrt{\left(\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}\right)}, y = \sqrt{\left(\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}\right)}.$$

Pero, segun el problema anterior, el radio del círculo circunscrito al triángulo ABC, cuyos lados son a, b, x, puede expresarse por la fómula $z = \frac{abx}{\sqrt{[4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2]}}$.

Substituyendo en lugar de x el valor que acabamos de hallar, y descomponiendo el resultado en factores, saldrá

$$z = \sqrt{\left(\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)}\right)}.$$

Esto sentado, la área del triángulo ABC $= \frac{\frac{1}{4}abx}{z}$, la del triángulo ADC $= \frac{\frac{1}{4}cdx}{z}$; luego la área del quadrilátero ABCD $= \frac{1}{4}.\frac{(ab + cd)x}{z}$: y esto es igual á

$\frac{1}{4}\sqrt{[(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)]}$.

Y si hacemos para abreviar $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, tendremos la área ABCD $= \sqrt{(p - a . p - b . p - c . p - d)}$. En fin, para tener uno de los ángulos, por exemplo, el ángulo A, se observará que el triángulo ABC dá cos. A $= \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}$

substituyendo el valor de x y reduciendo, tendremos cos. A

$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,ab + 2\,cd}$. De aquí se saca $\frac{1 - \cos. A}{1 + \cos. A}$ ó tang.^{2} $\frac{1}{2}$ A $= \frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 - (c-d)^2} = \frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}$.

Luego tang. $\frac{1}{2}$ A $= \sqrt{\left(\frac{p-a.\ p-b}{p-c.\ p-d}\right)}$.

PROBLEMA III.

En el quadrilátero ABDC, *cuyos ángulos opuestos* B *y* C *son rectos, dados que sean los dos lados* AB, AC *con el ángulo comprehendido* BAC, *hallar los otros dos lados, y la diagonal* AD. Fig. 5.

Sea AC $= b$, AB $= c$, y el ángulo BAC $=$ A. Si se prolongan BD y AC hasta que se encuentren en E, el triángulo BAE, rectángulo en B, y en el qual se conoce el ángulo BAE y el lado ABD, dará AE $= \frac{c}{\cos. A}$: luego CE $= \frac{c}{\cos. A} - b$. El triángulo DCE, rectángulo en C, y en el qual se conocen el lado CE y el ángulo CDE $=$ A, dará CD $=$ CE cot. A $= \frac{c - b \cos. A}{\text{sen. } A}$. Tendremos pues semejantemente BD $= \frac{b - c \cos. A}{\text{sen. } A}$. Estos son los valores de los dos lados del quadrilátero que se buscaban.

De aquí resulta la diagonal AD $= \sqrt{((AC)^2 + (DC)^2)} = \sqrt{\left(b^2 + \left(\frac{c - b \cos. A}{\text{sen. } A}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos. A)}}{\text{sen. } A}$. Pero por el triángulo BAC, tendríamos BC $= \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc \cos. A)}$. Luego la diagonal AD, que une los dos ángulos obliquos, está con la diagonal BC, que une los dos ángulos rectos : : 1 : sen. A.

Escolio. La diagonal AD es al mismo tiempo diámetro del círculo en que estaria inscrito el quadilátero ABDC.

En este círculo tendriamos el ángulo ABC = ADE: luego baxando á AB la perpendicular CF, los triángulos BFC, ADC son semejantes y dan AD : BC :: AC : FC :: 1 : sen. A; y esto concuerda con el resultado anterior.

PROBLEMA IV.

Dadás las tres aristas de un paralelepípedo con los ángulos que forman entre sí, hallar la solidez del paralelepípedo.

Fig. 6. Sean las aristas $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$, y los ángulos comprehendidos $ASB = \alpha$, $ASC = \beta$, $BSC = \gamma$. Si desde el punto C se tira al plano ASB la perpendicular CO, el triángulo rectángulo CSO dará CO = CS sen. CSO = h sen. CSO. Ademas la superficie del paralelógramo ASBP = fg sen. α. Luego si llamamos S la solidez del paralelepípedo ST, tendremos S = fgh sen. α sen. CSO. Nos queda por hallar sen. CSO.

Para esto, desde el punto S, como centro y con un radio = 1, descríbase una superficie esférica que encuentre en D, E, F, G á las rectas SA, SB, SC, SO; resultará un triángulo DEF, en el qual el arco FG es perpendicular á ED, por ser el plano CSO perpendicular á ASB. Pero el triángulo DEF, donde se conocen los tres lados DE = α, DF = β, EF = γ, dá

$$\cos. E = \frac{\cos. \beta - \cos. \alpha \cos. \gamma}{\text{sen. } \alpha \text{ sen. } \gamma}, \text{ y sen.} E = \frac{\sqrt{(1 - \cos.^2 \alpha - \cos.^2 \beta - \cos.^2 \gamma + 2 \cos. \alpha \cos. \beta \cos. \gamma)}}{\text{sen. } \alpha \text{ sen. } \gamma}$$

Ademas el triángulo rectángulo EFG da sen. GF ó sen. CSO = sen. E sen. EF = sen. γ sen. E. Luego S = fgh sen. α sen. γ sen. E, ó

$$S = fgh\sqrt{(1 - \cos.^2 \alpha - \cos.^2 \beta - \cos.^2 \gamma + 2 \cos. \alpha \cos. \beta \cos. \gamma)}.$$

En esta expresion la cantidad que está debaxo del radical es el producto de los dos factores sen. α sen. γ + cos. β — cos. α cos. γ, y sen. α sen. γ — cos. β + cos. α cos. γ. El primero $= \cos.\beta - \cos(\alpha+\gamma) = 2\,\text{sen.}\dfrac{\gamma+\beta+\gamma}{2}\,\text{sen}\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$;

el segundo $= \cos.(\alpha-\gamma) - \cos.\beta = 2\,\text{sen}\,\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$

$\text{sen.}\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$. Luego la solidez buscada es

$$S = 2fgh\sqrt{\left(\text{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\,\text{sen}\frac{\gamma+\beta-\gamma}{2}\,\text{sen}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\,\text{sen}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}.$$

PROBLEMA V.

Dadas las mismas cosas que en el problema anterior, hallar la expresion de la diagonal tirada entre dos vértices opuestos.

Sea la diagonal de la base SP $= z$, y la diagonal que se busca ST $= u$. El triángulo ASP, en el qual cos. SAP $= -\cos.\alpha$, dará $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg\cos.\alpha$. Del mismo modo el triángulo TSP, en el qual cos. TPS $- =$ cos. CSP, dará $u^2 = z^2 + h^2 + 2hz$ cos. CSP. Solo se trata de hallar el coseno del ángulo CSP ó del arco FH; pero en el triángulo esférico EFH tenemos cos. FH $=$ cos. EF cos. EH $+$ sen. EF sen. EH cos. E. Substituyendo los valores EF $= \gamma$, y cos. E $=$

$\dfrac{\cos.\beta - \cos.\alpha\cos.\gamma}{\text{sen.}\alpha\,\text{sen.}\gamma}$, será cos. FH $= \cos.\gamma$ cos. EH $+$

$\dfrac{\text{sen. EH}}{\text{sen.}\alpha}\left(\cos.\beta - \cos.\alpha.\cos.\gamma\right) =$

$\dfrac{\text{sen. EH}\cos.\beta}{\text{sen.}\alpha} + \dfrac{\text{sen.}(\alpha - \text{EH}).\cos.\gamma}{\text{sen.}\alpha} = \dfrac{\text{sen.EH}\cos.\beta + \text{sen.DH}\cos.\alpha}{\text{sen.}\alpha}$.

Luego $2hz$ cos. FH, ó $2hz$ cos. CSP $=$

$2h\cos.\beta\dfrac{z\,\text{sen. EH}}{\text{sen.}\alpha} + 2h\cos.\gamma\dfrac{z\,\text{sen. DH}}{\text{sen.}\alpha}$. Pero en el triángulo BSP tenemos $BP = \frac{SP \text{ sen. } BSP}{\text{sen. } SBP}$, y $BS = \frac{SP \text{ sen.} SBP}{\text{sen. } SBP}$,

de donde resulta $\frac{z \text{ sen. } EH}{\text{sen. } \alpha} = f$, y $\frac{z \text{ sen. } DH}{\text{sen. } \alpha} = g$. Luego

$2hz$ cos. $CSP = 2fh$ cos. $\beta + 2gh$ cos. γ. Luego finalmente el quadrado de la diagonal que se busca es

$u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos. \alpha + 2fh \cos. \beta + 2gh + \cos. \gamma$.

Corolario. El ángulo sólido A está formado por las aristas f, g, h, haciendo entre ellas de dos en dos los ángulos $200° - \alpha$, $200° - \beta$, α; así basta mudar los signos de cos. α y cos. β en la expresion de $(SE)^2$ para tener la de $(AM)^2$. Haciendo lo mismo para las otras dos diagonales, tendrémosles valores de sus quadrados como sigue:

$(ST)^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos. \alpha + 2fh \cos. \beta + 2gh \cos. \gamma$.
$(AM)^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos. \alpha - 2fh \cos. \beta + 2gh \cos. \gamma$.
$(BN)_2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg \cos. \alpha + 2fh \cos. \beta - 2gh \cos. \gamma$.
$(BP)^2 = f^2 + g^2 + h_2 + 2fg \cos. \alpha - 2fh \cos. \beta - 2gh \cos. \gamma$.

De aquí se saca $(ST)^2 + (AM)^2 + (BN)^2 + (CP)^2 4f=^2 + 4g^2 + 4b^2$. Luego *en todo paralelepípedo la suma de los quadrados de las quatro diagonales es igual á la suma de los quadrados de las doce aristas*. Este teorema notable y análogo al que se verifica en el paralelógramo *, podria deducirse inmediatamente de este último; porque por medio de los paralelógramos SCTP, ABMN, tenemos

* Pr. 14. 3. Cor.

$$(ST)^2 + (CP)^2 = 2(SC)^2 + 2(SP)^2$$
$$(AM)^2 + (BN)^2 = 2(BM)^2 + 2(AB)^2.$$

Sumando estas dos eqüaciones, y observando que tenemos $SC = BM$, y $(SP)^2 + (AB)_2 = 2(SA)^2 + 2(SB)^2$, resulta $(ST)^2 + (AM)^2 + (BN)^2 + (CP)^2 = 4(SA)^2 + 4(SB)^2 + 4(SC)^2$.

PROBLEMA VI.

Dadas las tres aristas que terminan en un mismo vértice de una pirámide triangular, y los tres ángulos que forman estas aristas entre sí, hallar la solidez de la pirámide.

Sea SABC la pirádime triangular propuesta, en la qual se conocen las aristas $SA = f$, $SB = g$, $SC = h$; y los ángulos comprehendidos ASB $= \alpha$, ASC $= \beta$, BCS $= \gamma$. Si sobre las aristas SA, SB, SC, cuya magnitud y posicion está dada, describimos el paralelepípedo TS, la pirámide que es la tercera parte del prisma triangular BSANMC será la sexta del paralelepípedo ST. Luego llamando P la solidez de la pirádime, tendremos segun el probl. 4,

$$P = \tfrac{1}{6} fgh \sqrt{(1 - \cos.^2\alpha - \cos.^2\beta - \cos.^2\gamma + 2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\alpha)}.$$

$$ó\ P = \tfrac{1}{3} fgh \sqrt{(\text{sen.}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\ \text{sen.}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\ \text{sen.}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\ \text{sen.}\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2})}.$$

PROBLEMA VII.

Dados los seis lados ó aristas de un pirádime triangular, hallar su solidez.

Si conservamos las mismas denominaciones que en el problema anterior, y hacemos ademas BC $= f'$, CA $= g'$, BA $= h'$, tendremos $\cos.\alpha = \frac{f^2 + g - h'^2}{2fg}$, $\cos.\beta = \frac{f^2 + h^2 - g'^2}{2fh}$, $\cos.\gamma = \frac{g^2 + h - f'^2}{2gh}$. Fig. 7.

Substituyendo estos valores en la fórmula hallada, y haciendo para abreviar $F = g^2 + h^2 - f'^2$, $G = f^2 + h - {}^2 g'^2$, $H = f^2 + g^2 - h'^2$, tendremos la solidez pedida

$$P = \tfrac{1}{12} \sqrt{(4f^2 g^2 h^2 - f^2 F^2 - g^2 G^2 - h^2 H^2 + JGH)}.$$

En la aplicacion de estas fórmulas se observará que f', g', h', denotan los lados de una misma cara ó base, y f, g, h, las otras tres aristas que van á dar al vértice, siendo tal su disposicion que f es opuesto á f', g á g', h á h'.

Escolio. Sea A la suma de los quatro triángulos que componen la superficie de la pirámide, sea r el radio de la esfera inscrita, es fácil de ver que tenemos $P = A \times \tfrac{1}{3} r$; porque podemos imaginar la pirámide descompuesta en otras quatro, que tendrian por vértice comun el centro de la esfera, y por bases las diferentes caras de la pirámide. Luego sacamos el radio de la esfera inscrita, $r = \frac{3P}{A}$.

PROBLEMA VIII.

Dadas las mismas cosas que en el problema VI, *hallar el radio de la esfera circunscrita á la pirámide.*

Fig. 8. Sea M el centro del círculo circunscrito al triángulo SAB, MO la perpendicular tirada por el punto M al plano SAB. Sea igualmente N el centro del círculo circunscrito al triángulo SAC, NO la perpendicular levantada al plano SAC en el punto N. Estas dos perpendiculares, situadas en un mismo plano MDN perpendicular á SA, se encontrarán en un punto O, que será el centro de la esfera circunscrita. Porque el punto O, como perteneciente á la perpendicular MO, está equidistante de los tres puntos S, A, B; y este mismo punto, como perteneciente á la perpendicular NO, está á igual distancia de los tres puntos S, A, C: luego equidista de los quatro puntos S, A, B, C.

Se puede imaginar que el punto M está determinado en el plano SAB en medio del quadrilátero SDMH, cuyos dos ángulos D y H son rectos, y donde tenemos SD $= \frac{1}{2}f$, SH $= \frac{1}{2}g$, y ASB $= \alpha$. Luego tendremos (segun el prob. III), DM $= \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f \cos.\alpha}{\text{sen.}\,\alpha}$; del mismo modo tendremos DN $= \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f \cos.\,6}{\text{sen.}\,6}$.

Llamemos D el ángulo MDN que mide la inclinacion de los dos planos SAB, SAC. En el triángulo esférico, cuyos lados son α, 6, γ, D será el ángulo opuesto al lado γ, y así tendremos $\cos.\,D = \frac{\cos.\gamma - \cos.\alpha \cos.\,6}{\text{sen.}\,\alpha\ \text{sen.}\,6}$ de modo que el ángulo D puede suponerse conocido.

Esto sentado, en el quadrilátero OMDN, cuyos dos ángulos M y N son rectos, y del qual se conocen los dos lados MD y DN y el ángulo comprehendido MDN $=$ D, tendremos, segun el problema III, el quadrado de la diagonal

$$(OD)^2 = \frac{(DM)^2 + (DN)^2 - 2DM \times DN \cos. D}{\text{sen.}^2}$$. Ademas en el triángulo rectángulo OSD tendremos $(SO)^2 = \times (OD)^2 + (SD)^2$, y este es el valor del quadrado del radio de la esfera circunscrita.

Si hacemos la substitucion de los valores de DM, DN, y despues la de los valores de cos. D y de sen. D, para tener inmediatamente la expresion del radio SO, por medio de los datos del problema VI, hallaremos para resultado:

$$SO = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{f^2\text{sen.}^2\gamma + g^2\text{sen.}^2\beta + h^2\text{sen.}^2\alpha - 2fg(\cos.\alpha - \cos.\beta\cos.\gamma) - 2fh(\cos.\beta - \cos.\alpha\cos.\gamma) - 2gh(\cos.\gamma - \cos.\alpha\cos.\beta)}{1 - \cos.^2\alpha - \cos.^2\beta - \cos.\gamma + 2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma}\right\}}.$$

NOTA VI.

Sobre la menor distancia de dos rectas que no estan situadas en un mismo plano.

Sean AB, CD dos rectas dadas, que no estan situadas en un mismo plano, y cuya menor distancia tratamos de hallar. Lám. 13. Fig. 1.

Háganse pasar en la direccion AB dos planos perpendiculares entre sí, que encuentren á CD el uno en C, y el otro en D. Desde los puntos C, D tírense á AB las perpendiculares CA, DB; en el plano ABD tírese DE paralela y AE perpendicular á AB, y quedará formado el rectángulo ABDE; en el plano CAE tírese CE, y á esta la perpendicular AI; en fin, en el plano CDE tírese IK paralela á DE hasta que encuentre á CD en K, hágase AL = IK y tírese KL: digo 1.º que la recta KL es perpendicular á un tiempo á las dos dadas AB, CD; 2.º que esta misma recta LK es mas corta que qualquiera otra que se tirase entre dos puntos de las líneas AB, CD, y que así KL, ó su igual AI, es la menor distancia pedida.

En efecto; 1.º las tres rectas AB, AC, AE son por construccion perpendiculares entre sí, y por consiguiente una de ellas AB es perpendicular al plano de las otras dos ACE: luego AB es perpendicular á AI. Ademas KI es paralela á DE, y DE á AB: luego es paralela á AB; y ya que hemos hecho AL = KI, se sigue que la figura AIKL es un rectángulo. Esto sentado, el ángulo AIK es recto lo mismo que AIC: luego la recta AI es perpendicular al plano KIC ó CDE: luego su paralela KL es tambien perpendicular al mismo plano CDE, y por consiguiente á CD. Luego 1.º la recta KL es perpendicular á un tiempo á las dos rectas AB, CD.

2.º Sea M un punto qualquiera de la recta CD, si tiramos por este punto la MN paralela á DE ó AB, la distancia del punto M á la recta AB será igual á AN, por ser recto el ángulo BAN. Pero tenemos AN > AI: luego AI es la distancia menor de las líneas dadas AB, CD.

Sean las perpendiculares CA $= a$, y DB = AE $= b$; tendremos CE $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$; y porque la expresion de la superficie del triángulo ACE es $\frac{1}{2}$ AC × AE, y tambien $\frac{1}{2}$ CE × AI, tendremos $AI = \frac{AC \times EA}{CE} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

Esta es la expresion de la menor distancia de las líneas dadas.

Si hacemos al mismo tiempo la distancia AB $= c$; y llamamos A el ángulo comprehendido entre las dos líneas dadas, esto es, el ángulo CDE comprehendido entre la línea CD y una paralela DE á la línea AB, el triángulo CDE, rectángulo en E, dará $\cos. CDE = \frac{DE}{CD}$, ó $\cos. A = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$; porque tenemos $(CD)^2 = (CE)^2 + (ED)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. De aquí sacaríamos tambien $\text{sen.}\ A = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$, y $\cot. A = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

NOTA VII.

Sobre los poliedros simétricos.

Para mayor sencillez y claridad hemos supuesto en la def. 16, lib. 6, que el plano al qual se refieren los poliedros simétricos es el plano de una cara: se podria suponer que este plano es un plano qualquiera, y entónces seria mas general la definicion, sin que hubiese nada que alterar en la prop. 11, por la qual hemos establecido las mútuas relaciones de los dos poliedros. Tambien se puede formar una idea bastante cabal de estos dos sólidos, considerando al uno de ellos como la imágen del otro formada en un espejo plano, que hará las veces del plano de que acabamos de hablar.

Aunque generalmente dos poliedros simétricos no pueden estar sobrepuestos, se puede no obstante probar por medio de algunas descomposiciones, que se pueden sobreponer por partes, y que así sus solideces son iguales. He aquí la demostracion de esta proposicion, una de las mas importantes de la teórica de los sólidos.

LEMA I.

Sea AOS *un triángulo isósceles, donde tenemos* AO = OS; *si por el punto* O *tiramos la recta* BOD *perpendicular al plano* AOS, *y tomamos de ambas partes las distancias iguales* OD = OB, *digo que las pirámides* DAOS, BAOS, *que tienen por base comun* AOS, *y por vértices los puntos* D *y* B, *son no solo simétricas uno á otro, como resulta de la construccion, sino que pueden sobreponerse á causa de la base isósceles, y son perfectamente iguales.* Fig. 9.

En efecto, se echa de ver que la pirámide AOSB, ó (para distinguirla mejor) A′OS′B′ puede colocarse exâctamente sobre la pirámide AOSD; y desde luego se puede sobreponer el triángulo isósceles S′OA′ á su igual AOS, de modo que el punto S′ coincida con A, y A′ con S. En esta situacion la perpendicular OB cubrirá exâctamente á su igual OD, y así el punto B caerá en D: luego las dos pirámides se confundirán en una sola, y serán iguales.

LEMA II.

Sea ahora ABC *un triángulo qualquiera,* O *el centro del círculo circunscrito á este triángulo, de modo que tengamos* OA = OB = OC; *si por el punto* O *levantamos al plano del triángulo la perpendicular* TOS, *y tomamos por ambas partes del plano las distancias iguales* OS, OT: Fig. 10.

digo que las dos pirámides simétricas SABC , TABC *serán iguales en solidez.*

Porque, segun el lema anterior, las pirámides AOBT, BOCT, AOCT son respectivamente iguales á las pirámides AOBS, BOCS, AOCS: luego la pirámide ABCT, que es la suma de las tres pirámides, es igual en solidez á la pirámide ABCS, que es la suma de las otras tres.

Escolio. Aunque el punto O, centro del círculo circunscrito, estuviese fuera del triángulo ABC, se echa de ver que la conclusion seria siempre la misma.

LEMA III.

Qualquiera pirámide triangular puede inscribirse en una esfera.

Fig. 11. Sea ABC la base de la pirámide propuesta, S su vértice, SP su altura; sea O el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC. Si por el punto O levantamos al plano ABC la perpendicular indefinida OX, todos los puntos de OX equidistarán de los puntos A, B, C. Solo se trata pues de hallar en OX un punto Z que esté igualmente distante de A y S; y este punto Z, que equidiste de los quatro puntos A, B, C, S, será el centro de la esfera circunscrita á la pirámide. La solucion de este problema es fácil de executar en un plano.

Fig. 12. Hágase un ángulo recto con las líneas SP, OP, siendo estas iguales á la del mismo nombre en la figura sólida; prolónguese PO la cantidad OD igual al radio AO del círculo circunscrito, tírese DS, y en la mitad de DS levántese la perpendicular indefinida YZ: digo que YZ encontrará á la perpendicular OX en el punto buscado Z, de modo que ZD ó ZS será el radio de la esfera circunscrita, y ZO la distancia de su centro al plano ABC.

En efecto, tenemos por construccion ZD = ZS; pero por ser OD = OA, resulta ZD = ZA = ZB = ZC: luego las quatro distancias ZA, ZB, ZC, ZS son iguales: luego Z es el centro de la esfera circunscrita.

Corolario 1. La recta YZ perpendicular á DS, y la recta OX perpendicular á DP se encontrarán siempre, pues forman entre sí un ángulo igual á SDP, y solo pueden cortarse en un punto: luego es siempre posible circunscribir una esfera á una pirádime triangular dada, y solo se puede circunscribir una.

Corolario II. La misma construccion, por la qual se determina el radio y el centro de la esfera circunscrita á la pirámide SABC, servirá para hallar el radio y el centro de la esfera circunscrita á la pirádime TABC simétrica á SABC; porque los valores de SP, OP, DO son los mismos en ambas partes. Luego las esferas circunscritas á las dos pirádimes son iguales, y sus centros equidistan de los planos de las caras iguales.

TEOREMA.

Dos pirádimes triangulares simétricas son iguales en solidez.

Sean las pirâmides SABC, TABC; sea Z el centro de la esfera circunscrita á la pirámide SABC, y Z′ el centro de la circunscrita á la pirámide TABC. Supongamos desde luego que el punto Z está situado dentro de la pirámide SABC, y en este caso tambien el punto Z′ estará dentro de la pirámide TABC. Fig. 13.

Sentado esto, se puede considerar la pirámide SABC compuesta de otras quatro ZABC, ZABS, ZBCS, ZACS, cuyo vértice comun es Z, y cuyas bases son las quatro caras de la pirámide. Podemos considerar igualmente la pirámide TABC como compuesta de las quatro Z′ABC, Z′ABT, Z′BCT, Z′ACT. Pero, en virtud del lema II, las pirámides ZABC, Z′ABC, son iguales en solidez; las pirámides ZABS, Z′ABT estan en el mismo caso, porque se podrian sobreponer una á otra las bases iguales ABS, ABT, y entónces los vértices Z, Z′, centros de las esferas circunscritas, serian los extremos de dos perpendiculares iguales tiradas al plano de la base comun por el centro del círculo circunscrito á dicha base. Luego la solidez ZABS $=$ Z′ABT; y del mismo modo ZBCS $=$ Z′BCT, ZACS $=$ Z′ACT: luego la pirámide SABC, que es la suma de los quatro ZABC, ZABS, ZBCS, ZACS, es equivalente á la pirámide TABC, suma de los quatro ZA′BC, Z′ABT, Z′BCT, Z′ACT.

Si los centros Z y Z′ estuviesen situados fuera de las pirámides, en tal caso, en vez de sumar los quatro ZABC, ZABS, ZBCS, ZACS, seria preciso restar una ó dos de la suma de las demas, para tener la pirámide

SABC; pero como la pirámide TABC se compondria del mismo modo de las otras quatro Z′ABC, Z′ABT, Z′BCT, Z′ACT, se deduciria siempre que las dos pirámides SABC, TABC son iguales en solidez.

TEOREMA.

Dos poliedros simétricos qualesquiera son equivalentes ó iguales en solidez.

Porque, suponiendo la misma construccion que en la prop. II., podemos figurarnos uno de los poliedros como compuesto de tantas pirámides triangulares AMPN, APNQ, &c., cuyo vértice comun es A, como triángulos MPN, PNQ, &c. hay en las diferentes caras del poliedro, excepto las que forman el ángulo A. El poliedro simétrico contendrá igual número de pirámides triangulares AM′P′ AP′N′,N′Q′, &c., las quales son simétricas á las pirámides AMPN, APNQ, &c. cada una á la suya. Luego, ya que las pirámides triangulares simétricas son equivalentes, se sigue que los poliedros, compuestos de un mismo número de pirámides iguales, son tambien iguales en solidez.

Fig. 205.

NOTA VIII.

Sobre la proposicion XXV, lib. VII.

Este teorema, demostrado la primera vez por Eulero en las Memorias de Petersburgo, año 1758, presenta muchas consecuencias que merecen aclararse.

1.° Sea a el número de los triángulos, b el número de los quadriláteros, c el de los pentágonos, &c. que componen la superficie de un poliedro; el número total de las caras será $a+b+c+d+$ &c., y el número total de sus lados será $3a+4b+5c+6d+$ &c. Este último número es duplo del de las aristas, pues una misma arista pertenece á dos caras; y así tendremos

$$H = a+b+c+d+\text{\&c.}$$

$$2\,A = 3a+4b+5c+6d+\text{\&c.}$$

Y ya que, segun el teorema de que tratamos, $S+H=A+2$, deducimos

$$2\,S = 4+a+2b+3c+4d+\text{\&c.}$$

Una de las consecuencias que estos valores hacen inferir, es que el número de las caras impares $a+c+e+$ &c. es siempre par.

Podemos hacer para mayor brevedad $\omega = b + 2c + 3d +$ &c., y en este caso tendremos

$$A = \tfrac{3}{2} H + \tfrac{1}{2} \omega.$$
$$S = 2 + \tfrac{1}{2} H + \tfrac{1}{2} \omega.$$

Así en qualquiera poliedro tenemos siempre $A > \frac{3}{2} H$, y $S > 2 + \frac{1}{2} H$; y aquí es preciso observar que el signo $>$ no excluye la igualdad, en atencion á que podriamos tener $\omega = 0$.

El número de todos los ángulos planos del políedro es $2A$, el de los ángulos sólidos S; de manera que el número medio de los ángulos planos que forman cada ángulo sólido es $\frac{2A}{S}$.

Este número no puede ser menor que 3, pues son necesarios á lo ménos tres ángulos planos para formar un ángulo sólido; así debemos tener $2A > 3S$, sin que el signo $>$ excluya la igualdad. Si substituimos á A y S sus valores en H y ω, tendremos $3H + \omega > 6 + \frac{3}{2} H + \frac{3}{2} \omega$, ó $3H > 12 + \omega$. Volviendo á poner los valores de H y ω en a, b, c, &c. resultará

$$3a + 2b + c > 12 + e + 2f + 3g + \text{\&c.}$$

donde se ve que a, b, c no pueden ser cero á un tiempo, y que así no exîste poliedro alguno, cuyas caras tengan todas mas de cinco lados.

Ya que $H > 4 + \frac{1}{3} \omega$, la substitucion en los valores de A y S dará $S > 4 + \frac{2}{3} \omega$, y $A > 6 + \omega$. Pero al mismo tiempo tenemos $\omega > 3H - 12$, y de aquí resulta $S < 2H - 4$, y $A < 3H - 6$, donde debemos acordarnos que los signos $>$ y $<$ no excluyen la igualdad. Estos límites se verifican generalmente en todos los poliedros.

2.º Supongamos $2A > 4S$, lo que conviene á una infinidad de poliedros, y particularmente á los que tienen todos sus ángulos sólidos formados por quatro ó mas planos; en este caso tendremos $H > 8 + \omega$, ó, haciendo la substitucion,

$$a > 8 + c + 2d + 3e + \text{\&c.}$$

luego debe tener el sólido á lo ménos ocho caras triangulares. El límite $H > 8 + \omega$ dá $S > 6 + \omega$, y $A > 12 + 2\omega$. Pero tenemos al mismo tiempo $\omega < H - 8$; y de aquí resulta $S < H - 2$, $A < 2H - 4$..

3.° Supongamos $2A > 5S$; y esto conviene entre otros poliedros á los que tienen sus ángulos sólidos á lo ménos quintuplos, y resultará $H > 20 + 3\omega$, ó

$$a > 20 + 2b + 5c + 8d + \&c.$$

Y tendremos al mismo tiempo $S > 12 + 2\omega$, y $A > 30 + 5\omega$; finalmente de ser $\omega < \frac{1}{3}(H-20)$, se sacan los límites

$S < \frac{2}{3}(H-2)$, $A < \frac{5}{3}(H-2)$.

No podemos poner $2A = 6S$, porque tenemos en general $2A + 2\omega + 12 = 6S$: luego no hay poliedro alguno que tenga todos sus ángulos sólidos formados por seis ó mas ángulos planos; y en efecto, el menor valor que tendria cada ángulo plano seria el del ángulo de un triángulo equilátero, y seis de estos ángulos compondrian quatro rectos, que es demasiado para un ángulo sólido.

4.° Consideremos un poliedro, cuyas caras sean todas triangulares, tendremos $\omega = 0$, lo que dará $A = \frac{3}{2}H$, y $S = 2 + \frac{1}{2}H$. Supongamos ademas que todos los ángulos sólidos del poliedro sean unos quintuplos, y otros séxtuplos; sea p el número de los ángulos sólidos quintuplos, q el de los sextuplos; y tendremos $S = p + q$, y $2A = 5p + 6q$, de donde resulta $6S - 2A = p$. Pero tenemos por otra parte $A = \frac{3}{2}H$, $S = 2 + \frac{1}{2}H$: luego $p = 6S - 2A = 12$. Luego *si un poliedro tiene triangulares todas sus caras, y sus ángulos sólidos unos son quintuplos y otros sextuplos, los ángulos sólidos quintuplos siempre serán* 12. Los sextuplos pueden tener un número qualquiera, así, dexando q indeterminada, tendremos en todos estos sólidos $S = 12 + q$, $H = 20 + 2q$, $A = 30 + 3q$.

Daremos fin á estas aplicaciones, averiguando el número de condiciones ó datos necesarios para determinar un poliedro: qüestion interesante, que parece no haberse resuelto todavia.

Supongamos desde luego que sea el poliedro *de una especie determinada*, esto es, que conozcamos el número de sus caras, el de sus lados individualmente, y su disposicion unos respecto á otros. Se conocen pues los números H, S, A, igualmente que a, b, c, d, &c.; solo se trata de hallar el número de datos efectivos, líneas ó ángulos, por medio de los quales puede construirse y determinarse el poliedro.

Consideremos una de las caras del poliedro, que tomaremos por su base. Sea n el número de sus lados; serán precisos $2n - 3$ datos para determinar esta base. El número de los ángulos sólidos fuera de la base son $S - n$; son necesarios tres datos para determinar el vértice de cada ángulo; así la posicion de $S - n$ vértices exîgiria $3S - 3n$ datos, y añadidos los $2n - 3$ de la base, tendriamos en todo $3S - n - 3$. Pero este número es en general demasiado grande, y deben quitarse de él las condiciones necesarias para que los vértices que corresponden á una misma cara estén en un mismo plano. Hemos llamado n el número de los lados de la base, llamemos tambien n', n'', &c. los números de lados de las otras caras. Tres puntos determinan un plano; así lo que se halle de mas que 3 en cada uno de los números n', n'', &c. dará otras tantas condiciones para que los diferentes vértices estén situados en los planos de las caras á que pertenecen, y el número total de estas condiciones será igual á la serie $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) +$ &c. Pero el número de los términos de esta serie es $H - 1$, y ademas $n + n' + n'' +$ &c. $= 2A$: luego la suma de la serie será $2A - n - 3(H - 1)$. Restando esta suma de $3S - n - 3$, queda $3S - 2A + 3H - 6$, cuya cantidad, por por ser $S + H = A + 2$, se reduce á A. Luego *el número de datos necesarios para determinar un poliedro, entre todos los de la misma especie, es igual al de sus aristas.*

Obsérvese sin embargo que estos datos de que hablamos no deben tomarse indeliberadamente entre las líneas y ángulos que constituyen los elementos del poliedro; pues aunque hubiese tantas equaciones como incógnitas, podria haber ciertas relaciones entre las cantidades conocidas que hiciesen indeterminado el problema. Así parece desde luego, por el teorema que acabamos de hallar, que basta en general conocer las aristas para determinar un poliedro; pero hay casos en que no es suficiente este conocimiento. Por exemplo, dado un prisma qualquiera que no sea triangular, se podrán formar otros infinitos prismas que tendrán aristas iguales, y colocadas de un mismo modo; porque en teniendo la base mas de tres lados, se pueden conservar los lados, y alterar los ángulos, y dar así á esta base una infinidad de formas diferentes. Tambien se puede mudar la posicion de la arista longitudinal del prisma, respecto al plano de la base; y en fin, se pueden combinar estas dos mudanzas una con otra, y resultará siempre un prisma, cuyas aristas ó lados no se habrán alterado en nada. Aquí se ve pues que las aristas solas no bastan para determinar el sólido.

Los datos que conviene tomar para determinar un sólido, son los que no dexan cosa alguna indeterminada, y solo dan una solucion. Y desde luego, la base ABCDE será determinada, entre otras maneras, conociendo el lado AB, con los ángulos adyacentes BAC, ABC, para el punto C; los ángulos BAD, ABD, para el punto D, y así de los demas. Sea ahora M un punto, cuya situacion fuera del plano de la base tratamos de determinar: este punto quedará determinado sí, imaginando la pirámide MABC, ó solo el plano MAB, conocemos los ángulos MAB, ABM, y la inclinacion del plano MAB á la base ABC. Si determinamos por medio de tres datos semejantes la posicion de cada vértice del poliedro fuera del plano de la base, es claro que el poliedro quedará determinado absolutamente y de un modo único; de modo, que dos poliedros construidos con los mismos datos, serán por precision iguales. Serian sin embargo simétricos uno á otro si estuviesen construidos á diferentes lados del plano de la base.

Fig. 14.

No siempre son necesarios tres datos para determinar cada ángulo sólido de un poliedro; porque si el punto M debe estar en un plano ya determinado, cuya interseccion con la base sea FG, bastará, despues de tomar FG á arbitrio, conocer los ángulos MGF, y MFG: y así será preciso un dato ménos. Si el punto M debe hallarse en dos planos ya determinados, y en su comun interseccion MK que encuentra al plano ABC en K, conoceremos ya el lado AK, el ángulo AKM, y la inclinacion del plano AKM á la base; bastará pues tener por nuevo dato el ángulo MAK. Así es que el número de datos necesarios para determinar un poliedro absolutamente, y de un modo único, se reducirá siempre al de sus aristas A.

El lado AB y un número A — 1 de ángulos dados determinan un poliedro; otro lado qualquiera, y los mismos ángulos determinarán un poliedro semejante. De aquí se deduce que *el número de condiciones necesarias para que sean semejantes dos poliedros de la misma especie, es igual* *al de sus aristas ménos una.*

Seria mucho mas sencilla la qüestion que acabamos de resolver, si no se conociese la especie del poliedro, y sí únicamente el número de sus ángulos sólidos S. Determínense entónces tres vértices qualesquiera por medio de un triángulo donde habrá tres datos; este triángulo se considerará como base del sólido, y luego los vértices fuera de esta base serán $S - 3$; y como se necesitan tres datos para determinar cada uno de ellos, es claro que el número total de datos necesarios para determinar el poliedro será $3 + 3(S - 3)$, ó $3S - 6$.

Serán pues precisos $3S - 7$ condiciones para que sean semejantes dos poliedros de igual número de ángulos sólidos.

NOTA IX.

Sobre los poliedros regulares. (Véase el apéndice al libro VII.)

En la proposicion II de este apéndice nos hemos aplicado á demostrar la exîstencia de cinco poliedros regulares, esto es, la posibilidad de disponer cierto número de planos iguales de modo que resulte un sólido uniforme en toda su extension. Nos parece que en otras obras se supone exîstente esta colocacion de planos, sin dar bien la razon; ó no se demuestra, como lo ha hecho Euclides, sino con figuras complicadas y dificiles de entender.

El problema de determinar la inclinacion de dos caras adyacentes del poliedro, y el de hallar los radios de las esferas inscritas y circunscritas, estan reducidos en los problemas III y IV á construcciones sumamente sencillas; pero no será inútil aplicar estos mismos problemas al cálculo trigonométrico, que nos dará además nuevas proposiciones.

Sean a, b, c, los tres ángulos planos que componen el ángulo sólido O, y nos proponemos hallar la inclinacion de los planos en que estan los ángulos a y b. Trazarémos desde el centro O el triángulo esférico ABC, en el qual se conocen los tres lados $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, y será preciso hallar el ángulo C comprehendido entre los lados a y b. Por las fórmulas sabidas, tenemos cos. C $=$ Fig. 222.

$\frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\text{sen.}\, a\, \text{sen.}\, b}$. Esta fórmula aplicada á los cinco po-

...

liedros regulares, va á hacernos conocer la inclinacion de dos caras adyacentes en cada sólido.

Fig. 243. En el tetraedo, los tres ángulos planos que componen el ángulo sólido S, son ángulos de triángulos equiláteros. Sea pues la semicircunferencia ó el arco de $180^\circ = \pi$; tendremos $a = b = c = \frac{1}{3}\pi$: luego $\cos. C = \frac{\cos. a - \cos.^2 a}{\text{sen.}^2 a} =$

$\frac{\cos. a (1 - \cos. a)}{1 - \cos.^2 a} = \frac{\cos. a}{1 + \cos. a}$; pero sabemos que $\cos. \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$; luego $\cos. C = \frac{1}{3}$.

Fig. 244. En el cubo ó exâedro, los tres ángulos planos que forman el ángulo sólido A, son rectos; y así tenemos $a = b = c = \frac{1}{2}\pi$, y $\cos. a = 0$: luego $\cos C = 0$. Luego el ángulo de dos caras adyacentes es recto.

Fig. 245. En el octaedro, si hacemos $a = \text{DAS} = \frac{1}{3}\pi$, $b = \text{DAT} = \frac{1}{2}\pi$, $c = \text{TAS} = \frac{1}{3}\pi$, tendremos

$\cos. C = \frac{\cos. \frac{1}{2}\pi - \cos.^2 \frac{1}{3}\pi}{\text{sen.}^2 \frac{1}{3}\pi}$. Pero $\cos. \frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos. \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\text{sen.} \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$: luego $\cos C = -\frac{1}{3}$. Aquí se ve bien á las claras que la inclinacion de las caras del octaedro y la inclinacion de las del tetraedo son suplementos una de otra.

Fig. 246. En el dodecaedro, un ángulo sólido está formado por tres ángulos planos iguales cada uno al ángulo de un pentágono regular. Así, haciendo $a = b = c = \frac{3}{5}\pi$, tendremos $\cos. C = \frac{\cos. a}{1 + \cos. a}$; pero $\cos. \frac{3}{5}\pi = -\text{sen.} \frac{1}{10}\pi =$

$\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$; luego $\cos. C = \frac{1 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\text{sen. } C = \frac{2}{\sqrt{5}}$, y $\text{tang. } C = -2$.

Fig. 247. En el icosaedro, es preciso hacer $c = \text{C'B'D'} = \frac{3}{5}\pi$, $a = b = \text{C'B'A'} = \frac{1}{3}\pi$, y tendremos

$$\cos. C = \frac{\cos. \frac{3}{5}\pi - \cos.^2 \frac{1}{3}\pi}{\text{sen.}^2 \frac{1}{3}\pi.} = \frac{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}:$$

luego sen. C. $= \frac{2}{3}$. Tales son las sencillísimas expresiones por las quales determinamos la inclinacion de dos caras en los cinco poliedros regulares; pero vamos á ver que se podrian comprehender en una sola y misma fórmula.

En efecto, sea n el número de lados de cada cara, m el número de ángulos planos que forman cada ángulo sólido. Si desde el centro O, y con un radio $= 1$, describimos una superficie esférica que encuentre en p, q, r á las líneas OA, OC, OD, tendremos un triángulo esférico pqr, en el qual conocemos el ángulo recto r, el ángulo $p = \frac{\pi}{m}$, y el ángulo $q = \frac{\pi}{n}$. Resulta pues, por las fórmulas conocidas, $\cos. qr = \frac{\cos. p}{\text{sen. } q}$. Pero $\cos. qr = \cos. \text{COD} = \text{sen. CDO} = \text{sen. } \frac{1}{2} C$, señalando C el ángulo CDE: luego Fig. 248.

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\cos. \frac{\pi}{m}}{\text{sen. } \frac{\pi}{n}}.$$ Fórmula general, que aplicada succesivamente á los cinco poliedros, daria para cos. C, ó $1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} C$ los mismos valores que hemos hallado por otro camino; para esto es preciso substituir en cada caso los valores de m y n, á saber:

	Tetraedro,	Exâedro,	Octaedro,	Dodecaedro,	Icosaedro.
$m =$	3,	3,	4,	3,	5.
$n =$	3,	4,	3,	5,	3.

El mismo triángulo esférico pqr, de donde acabamos de deducir la inclinacion de dos caras adyacentes, da $\cos. pq = \cot. p \cot. q$, ó $\frac{\text{CO}}{\text{OA}} = \cot. \frac{\pi}{m} \cot. \frac{\pi}{n}$. Luego si llamamos R el radio de la esfera circunscrita al poliedro, y r el radio de la esfera inscrita en el mismo poliedro, tendremos $\frac{R}{r} = \text{tang. } \frac{\pi}{m} \text{ tang. } \frac{\pi}{n}$; además, haciendo el lado

$AB = a$, tenemos $CA = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\text{sen.}\,\frac{\pi}{n}}$, y por consiguiente $R^2 = r^2 + \dfrac{\frac{1}{4}a^2}{\text{sen.}^2\frac{\pi}{n}}$. Estas dos equaciones darán para cada poliedro los valores de los radios R, r de las esferas circunscrita é inscrita. Tambien tenemos, suponiendo C conocido, $r = \frac{1}{2}a \cot.\frac{\pi}{n}$ tang. $\frac{1}{2}$ C, y $R = \frac{1}{2}a$ tang. $\frac{\pi}{m}$ tang. $\frac{1}{2}$ C.

En el dodecaedro é icosaedro, vemos que la razon $\frac{R}{r}$ tiene el mismo valor tang. $\frac{\pi}{n}$ tang. $\frac{\pi}{5}$. Luego si R es el mismo para ambos, tambien r conservará un mismo valor; esto es, que si estos dos sólidos estan inscritos en una misma esfera, tambien estarán circunscritos á la misma esfera, y recíprocamente. La misma propiedad se verifica entre el exâedro y el octaedro, pues el valor de $\frac{R}{r}$ es tang. $\frac{\pi}{3}$ tang. $\frac{\pi}{4}$, tanto para uno como para otro.

Obsérvese que no son solo los poliedros regulares los sólidos comprehendidos por polígonos regulares iguales; porque si sobreponemos por una cara comun dos tetraedos regulares iguales, resultará un sólido formado por seis triángulos iguales y equiláteros. Podriamos tambien formar otro sólido con diez triángulos equiláteros iguales, pero solo los poliedros regulares son los que tienen al mismo tiempo los ángulos sólidos iguales.

NOTA X.

Sobre la área del triángulo esférico.

Sea 1 el radio de la esfera, π la semicircunferencia de un círculo máxîmo; sean a, b, c los tres lados de un triángulo esférico; A, B, C, los arcos de círculo máxîmo que miden los ángulos opuestos. Sea $A + B + C - \pi = S$; y, segun lo que se ha demostrado *, la área del triángulo esférico será igual al arco S multiplicado por el radio, y así la llamarémos S. Pero, segun las analogías de *Néper*, te- * 23. 7.

nemos $\text{tang.}\,\frac{A+B}{2} : \text{cot.}\,\frac{C}{2} :: \text{cos.}\,\frac{a-b}{2} : \text{cos.}\,\frac{a+b}{2}$.

De aquí, sacando el valor de tang. $\frac{1}{2}(A + B)$, deducirémos fácilmente el de $\text{tang.}\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) = -\text{cot.}\,\frac{1}{2}S$; tendremos pues

$$\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}S = \frac{\text{cot.}\,\frac{1}{2}a\ \text{cot.}\,\frac{1}{2}b + \text{cos.}\,C}{\text{sen.}\,C},$$

fórmula muy sencilla, que puede servir para calcular el área de un triángulo esférico conocidos dos lados a, b, y el ángulo comprehendido C. Tambien podemos deducir muchas consecuencias dignas de atencion.

1.° Si es constante el ángulo C, igualmente que el producto $\text{cot.}\,\frac{a}{2}\ \text{cot.}\,\frac{b}{2}$, la superficie del triángulo esférico representada por S, permanecerá constante. Luego dos triángulos CAB, CDE, que tienen un ángulo igual C, serán equivalentes si tenemos tang. $\frac{1}{2}$ CA : tang. $\frac{1}{2}$ CD : : tang. $\frac{1}{2}$ CE : tang. $\frac{1}{2}$ CB, esto es, si son recíprocamente proporcionales las tangentes de las mitades de los lados, que forman el ángulo igual. Fig. 16.

2.° Para formar sobre el lado dado CD, y con el mismo ángulo C, un triángulo CDE equivalente al dado CAB, es preciso determinar CE por la proporcion

tang. $\frac{1}{2}$ CD : tang. $\frac{1}{2}$ CA : : tang. $\frac{1}{2}$ CB : tang. $\frac{1}{2}$ CE.

3.° Para hacer con el ángulo del vértice C un triángulo isósceles DCE equivalente al dado CAB, debemos tomar tang. $\frac{1}{2}$ CD, ó tang. $\frac{1}{2}$ CE, media proporcional entre tang. $\frac{1}{2}$ CA y tang. $\frac{1}{2}$ CB.

4.° La misma fórmula $\text{cot.}\,\frac{1}{2}S = \frac{\text{cot.}\,\frac{1}{2}a\ \text{cot.}\,\frac{1}{2}b + \text{cos.}\,C}{\text{sen.}\,C}$

puede servir para demostrar muy sencillamente la proposicion XXVI del libro VII; á saber, que de todos los triángulos esféricos formados con dos lados dados *a* y *b*, aquel es mayor, cuyo ángulo C, comprehendido por los lados dados, es igual á la suma de los otros dos ángulos A y B.

Fig. 18. Con el radio $OZ = 1$ tráctese la semicircunferencia VMZ, hágase el arco $XZ = C$, y del otro lado del centro tómese $OP = \cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b$; finalmente tírese PX, y báxese XY perpendicular á PZ.

En el triángulo rectángulo PXY tenemos $\cot. P = \frac{PY}{XY}$

$= \frac{\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b + \cos. C.}{\text{sen. } C}$; luego $P = \frac{1}{2} S$: luego la superficie S será un *máxîmo*, si lo es el ángulo P. Pero es evidente que si tiramos PM tangente á la circunferencia, el ángulo MPO será el *máxîmo* de los ángulos P, y tendremos entónces $MPO = MOZ - \frac{1}{2}\pi$. Luego el triángulo esférico, formado con dos lados dados, será un *máxîmo* si tenemos $\frac{1}{2} S = C - \frac{1}{2}\pi$, ó $C = A + B$, lo que concuerda con la proposicion citada.

Esta construccion nos manifiesta al mismo tiempo que no se verificaria el *máxîmo* si el punto P estuviese dentro del círculo, esto es, si tuviésemos $\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b < 1$. De cuya condicion sacamos succesivamente $\cot. \frac{1}{2} a < \text{tang.} \frac{1}{2} b$, $\text{tang.} (\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} a) < \text{tang.} \frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} a < \frac{1}{2} + b$, y finalmente $\pi < a + b$, cuyos resultados convienen todavia con el escolio de la misma proposicion.

PROBLEMA I. *Hallar la superficie de un triángulo esférico por medio de sus tres lados.*

Para esto es preciso en la fórmula

$$\cot. \tfrac{1}{2} S = \frac{\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b + \cos. C}{\text{sen. } C.}$$

substituir los valores de sen. C y cos C expresados en a, b, c. Pero tenemos $\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}$, y $\cot. \frac{1}{2} a$

$\cot. \frac{1}{2} b = \frac{1 + \cos. a}{\text{sen. } a} . \frac{1 + \cos. b}{\text{sen. } b}$; de aquí resulta

$$\cos. C + \cot. \tfrac{1}{2} a \cot. \tfrac{1}{2} b = \frac{1 + \cos. a + \cos. b + \cos. c}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}$$

Ademas el valor de C da

$$1 + \cos. C = \frac{\cos. c - \cos. (a+b)}{\text{sen. } a \text{ sen. } b} = \frac{2 \text{ sen.} \frac{a+b+c}{2} \text{sen.} \frac{a+b-c}{2}}{\text{sen. } a \text{ sen. } b},$$

$$1 - \cos. C = \frac{\cos. (a-b) - \cos. c}{\text{sen. } a \text{ sen. } b} = \frac{2 \text{ sen.} \frac{a+c-b}{2} \text{sen.} \frac{b+c-a}{2}}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}.$$

Multiplicando estas dos cantidades entre sí, y sacando la raiz del producto, tendremos

$$\text{sen.} C = \frac{2\sqrt{\left(\text{sen.} \frac{a+b+c}{2} \text{sen.} \frac{a+b-c}{2} \text{sen.} \frac{a+c-b}{2} \text{sen.} \frac{b+c-a}{2}\right)}}{\text{sen. } a \text{ sen. } b}$$

luego finalmente

$$\cot. \tfrac{1}{2} S = \frac{1 + \cos. a + \cos. b + \cos. c}{2\sqrt{\left(\text{sen.} \frac{a+b+c}{2} \text{sen.} \frac{a+b-c}{2} \text{sen.} \frac{a+c-b}{2} \text{sen.} \frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

Esta fórmula resuelve el problema propuesto, pero podemos dar con otro resultado mas sencillo todavia.

Para esto volvamos á la fórmula

$$\cot. \tfrac{1}{2} S = \frac{\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b + \cos. C}{\text{sen. } C};$$

sacaremos desde luego $1 + \cot.^2 \frac{1}{2} S$, ó

$$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} S = \frac{\cot.^2 \frac{1}{2} a \cot.^2 \frac{1}{2} b + 2 \cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b \cos. C + 1}{\text{sen.}^2 C.}$$

Pero el valor de cos. C da $2 \cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b \cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} a \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} b}$; substituyendo en el numerador en lugar de $\cos. c$, $\cos. a$, $\cos. b$, sus valores $1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} c$, $1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} a$, $1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} b$, y haciendo la reduccion, tendremos

$$2 \cot. \tfrac{1}{2} a \cot. \tfrac{1}{2} b \cos. C = \frac{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} a + \text{sen.}^2 \frac{1}{2} b - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} c}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} a \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} b} - 2.$$

Tenemos ademas $\cot.^2 \frac{1}{2} a \cot.^2 \frac{1}{2} b = \frac{1 - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} a}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} a}$.

$\frac{1 - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} b}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} b} = \frac{1 - \text{sen}^2 \frac{1}{2} a \,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} b}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} a \,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} b} + 1$. Luego substituyendo estos valores tendremos $\frac{1}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} S} =$

$\frac{1 - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} C}{\text{sen.}_2 \frac{1}{2} a \,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} b \,\text{sen.}^2 C}$; lo que da

$\text{sen.} \frac{1}{2} S = \frac{\text{sen.} \frac{1}{2} a \,\text{sen.} \frac{1}{2} b \,\text{sen.}\, C}{\cos. \frac{1}{2} c}$, y, poniendo otra vez el valor de sen. C resulta

$$\text{sen.} \frac{1}{2} S = \frac{\sqrt{\left(\text{sen.} \frac{a+b+c}{2} \text{sen.} \frac{a+b-c}{2} \text{sen.} \frac{a+c-b}{2} \text{sen.} \frac{b+c-a}{2}\right)}}{2 \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}.$$

fórmula cómoda para el cálculo logarítmico; y si la multiplicamos por el valor de cot. $\frac{1}{2}$ S, resultará

$$\cot. \frac{1}{2} S = \frac{1 + \cos. a + \cos. b + \cos. c}{4 \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c} = \frac{\cos.^2 \frac{1}{2} a + \cos.^2 \frac{1}{2} b + \cos.^2 \frac{1}{2} c - 1}{2 \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}$$

nueva fórmula que tiene la ventaja de estar compuesta de términos racionales.

De aquí sacamos todavia $\frac{1 - \cos. \frac{1}{2} S}{\text{sen.} \frac{1}{2} S}$, ó

$$\text{tang.} \frac{1}{4} S = \frac{1 - \cos.^2 \frac{1}{2} a - \cos.^2 \frac{1}{2} b - \cos.^2 \frac{1}{2} c + 2 \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}{\sqrt{\left(\text{sen.} \frac{a+b+c}{2} \text{sen.} \frac{a+b-c}{2} \text{sen.} \frac{a+c-b}{2} \text{sen.} \frac{b+c-a}{2}\right)}}$$

Pero el numerador de esta expresion puede ponerse baxo esta otra forma

$(1 - \cos.^2 \frac{1}{2} a)(1 - \cos.^2 \frac{1}{2} b) - (\cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b - \cos. \frac{1}{2} c)^2$,
la qual se descompone en dos factores, á saber
$\text{sen.} \frac{1}{2} a \,\text{sen.} \frac{1}{2} b + \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b - \cos. \frac{1}{2} c$, y
$\text{sen.} \frac{1}{2} a \,\text{sen.} \frac{1}{2} b - \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b + \cos. \frac{1}{2} c$. Tambien estos tienen otra reduccion: el primero se muda en

$$\cos.\left(\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b\right)-\cos.\tfrac{1}{2}c=2\,\text{sen.}\frac{a+c-b}{4}\,\text{sen.}\frac{b+c-a}{4},$$

y el segundo en $\cos.\tfrac{1}{2}c-\cos.\left(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b\right)=2\,\text{sen.}\frac{a+b+c}{4}$

$\text{sen.}\frac{a+b+c}{4}$. Luego

$$\text{tang.}\tfrac{1}{4}S=\frac{4\,\text{sen}\frac{a+b+c}{4}\,\text{sen.}\frac{a+b-c}{4}\,\text{sen.}\frac{a+c-b}{4}\,\text{sen.}\frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\left(\text{sen.}\frac{a+b+c}{2}\,\text{sen.}\frac{a+b-c}{2}\,\text{sen.}\frac{a+c-b}{2}\,\text{sen.}\frac{b+c-a}{2}\right)}}$$

Pero tenemos $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}p}{\sqrt{\text{sen.}p}}=\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}^2\frac{1}{2}p}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}p\cos.\frac{1}{2}p}\right)}=\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}p$:

luego finalmente

$$\text{tang.}\tfrac{1}{4}S=\sqrt{\left(\text{tang.}\frac{a+b+c}{4}\,\text{tang.}\frac{a+b-c}{4}\,\text{tang.}\frac{a+c-b}{4}\,\text{tang.}\frac{b+c-a}{4}\right)}.$$

Se debe esta excelente fórmula á Simon Lhuiller.

PROBLEMA II. *Dados los tres lados* BC $=a$, AC $=b$, AB $=c$, *determinar el punto* I, *polo del círculo circunscrito al triángulo* ABC. Fig. 19.

Sea el ángulo ACI $=x$, y el arco AI $=$ CI $=$ BI $=\varphi$. En los triángulos CAI, CBI, tendremos por las fórmulas conocidas

$$\cos.x=\frac{\cos.\varphi-\cos.b\cos.\varphi}{\text{sen.}b\,\text{sen.}\varphi}=\frac{1-\cos.b}{\text{sen.}b}\cot.\varphi=\frac{\text{sen.}b}{1+\cos.b}\cot.\varphi,$$

$\cos.(C-x)=\frac{1-\cos.a}{\text{sen.}a}\cot.\varphi$. Luego $\frac{\cos.(C-x)}{\cos.x}$, ó

$\cos.C+\text{sen.}C\,\text{tang.}x=\frac{(1+\cos.b)(1-\cos.a)}{\text{sen.}a\,\text{sen.}b}$. Substituyendo en esta equacion los valores de cos. C y sen. C expresados en a, b, c, y haciendo, para mayor brevedad $M=\sqrt{(1-\cos.^2a-\cos.^2b-\cos.^2c+2\cos.a\cos.b\cos.c}$, deducirémos $\text{tang.}x=\frac{1+\cos.b-\cos.c-\cos.a}{M}$, fórmula que determina el ángulo ACI. Podemos observar que los triángulos isósceles ACI, BAI, CBI, dan ACI $=\tfrac{1}{2}$ (C $+$ A $-$ B); igualmente tendriamos BCI $=\tfrac{1}{2}$(B $+$ C $-$ A), BAI $=\tfrac{1}{2}$ (A $+$ B $-$ C). De aquí resultan estas fórmulas dignas de atencion:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + C - B) = \frac{1 + \cos. b - \cos. a - \cos. c}{M}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B + C - A) = \frac{1 + \cos. a - \cos. b - \cos. c}{M}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + B - C) = \frac{1 + \cos. c - \cos. a - \cos. b}{M},$$

á las quales podemos añadir la que da cot. $\frac{1}{2}$ S, y que puede ponerse en esta forma

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A + B + C) = \frac{-1 - \cos. a - \cos. b - \cos. c}{M},$$

El valor de tang. x que acabamos de hallar, da $1 + \text{tang.}^2\ x$ ó $\frac{1}{\cos.^2 x} = \frac{2(1 + \cos. b)(1 - \cos. c)(1 - \cos. a)}{M^2} =$

$$\frac{16 \cos.^2 \frac{1}{2} b\ \text{sen.}^2 \frac{1}{2} c\ \text{sen.}^2 \frac{1}{2} a}{M^2}$$

Luego $\frac{1}{\cos. x} = \frac{4 \cos. \frac{1}{2} b\ \text{sen.} \frac{1}{2} c\ \text{sen.} \frac{1}{2} a}{M}$. Pero de la equacion $\cos. x = \frac{1 - \cos. b}{\text{sen.}\ b} \cot. \varphi = \text{tang.} \frac{1}{2} b \cot. \varphi$, sacamos

$\text{tang.}\ \varphi = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2} b}{\cos. x}$; luego $\text{tang.}\ \varphi = \frac{4\ \text{sen.} \frac{1}{2} a\ \text{sen.} \frac{1}{2} b\ \text{sen.} \frac{1}{2} c}{M}$

$$= \frac{2\ \text{sen.} \frac{1}{2} a\ \text{sen.} \frac{1}{2} b\ \text{sen.} \frac{1}{2} c}{\sqrt{\left(\text{sen.} \frac{a+b+c}{2}\ \text{sen.} \frac{a+b-c}{2}\ \text{sen.} \frac{a+c-b}{2}\ \text{sen.} \frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

PROBLEMA III. *Determinar en la superficie de la esfera la línea en que están situados todos los vértices de los triángulos de una misma base y superficie.*

Fig. 17. Sea ABC uno de los triángulos esféricos, cuya base comun es $AB = c$, y la superficie dada $A + B + C - \pi = S$. Sea IPK una perpendicular indefinida levantada en la mitad de AB; tomando IP igual al quadrante, será P el polo del arco AB, y el arco PCD, tirado por los puntos P, C, será perpendicular á AB. Sea $ID = p$, $CD = q$;

los triángulos rectángulos ACD, BCD, en los quales tenemos $AC = b$, $BC = a$, $AD = p + \frac{1}{2}c$, $BD = p - \frac{1}{2}c$, darán $\cos. a = \cos. q \cos. (p - \frac{1}{2}c)$, $\cos. b = \cos. q \cos. (p + \frac{1}{2}c)$. Pero hemos hallado ántes

$$\cot. \tfrac{1}{2} S = \frac{1 + \cos. a + \cos. b + \cos. c}{\text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ sen. } C}$$

Substituyendo en esta fórmula los valores $\cos. a + \cos. b = 2 \cos. q \cos. p \cos. \frac{1}{2}c$, $1 - \cos. c = 2 \cos.^2 \frac{1}{2}c$, $\text{sen. } b \text{ sen. } C = \text{sen. } c \text{ sen. } B = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}c \cos. \frac{1}{2}c \text{ sen. } B$, tendremos

$$\cot. \tfrac{1}{2} S = \frac{\cos. \frac{1}{2}c + \cos. p \cos. q}{\text{sen. } a \text{ sen. } \frac{1}{2}c \text{ sen. } B}$$

Ademas, en el triángulo rectángulo BCD, tenemos tambien $\text{sen. } a \text{ sen. } B = \text{sen. } q$; luego

$$\cot. \tfrac{1}{2} S = \frac{\cos. \frac{1}{2}c + \cos. p \cos. q}{\text{sen. } \frac{1}{2}c \text{ sen. } q}$$

ó $\cos. p \cos. q = \cot. \frac{1}{2} S \text{ sen. } \frac{1}{2}c \text{ sen. } q - \cos. \frac{1}{2}c$; esta es la razon entre p y q, que debe determinar la línea en que estan situados todos los puntos C.

Habiendo prolongado la IP la cantidad $PK = x$, tírese KC, y sea $KC = y$; en el triangulo PKC, donde tenemos $PC = \frac{1}{2}\pi - q$, y el ángulo $KPC = \pi - p$, el lado KC se hallará por la fórmula $\cos. KC = \cos. KPC \text{ sen. } PK \text{ sen. } PC + \cos. PK \cos. PC$, ó

$$\cos. y = \text{sen. } q \cos. x - \text{sen. } x \cos. q \cos. p;$$

substituyendo en ella en lugar de $\cos. q \cos. p$ su valor $\cot. \frac{1}{2} S \text{ sen. } \frac{1}{2}c \text{ sen. } q - \cos. \frac{1}{2}c$, resulta

$$\cos. y = \text{sen. } x \cos. \tfrac{1}{2}c + \text{sen. } q (\cos. x - \text{sen. } x \cot. \tfrac{1}{2} S \text{ sen. } \tfrac{1}{2}c).$$

Aquí vemos que si hacemos $\cos. x - \text{sen. } x \cot. \frac{1}{2} S \text{ sen. } \frac{1}{2}c = 0$, ó $\cot. x = \cot. \frac{1}{2} S \text{ sen. } \frac{1}{2}c$, tendremos $\cos. y = \text{sen. } x \cos. \frac{1}{2}c$, y de este modo será constante el valor de y.

Luego si despues de haber tirado el arco IP perpendicular á la mitad de la base AB, tomamos mas allá del polo la parte PK, tal que $\cot. PK = \cot. \frac{1}{2} S \text{ sen. } \frac{1}{2}c$, todos los vértices de los triángulos que tienen la misma base c é igual superficie S, estarán situados en el círculo menor descrito desde el punto K, como polo á la distancia KC, tal que $KC = \text{sen. } PK \cos. \frac{1}{2}c$.

Debemos á Lexell este hermoso teorema. (Véase el tom. v, part. I, *de nova acta petropolitana.*)

NOTA XI.

Sobre la prop. III, lib. VII.

Podemos demostrar esta proposicion mas rigurosamente, recurriendo á los lemas preliminares, del modo siguiente.

Fig. 252. Digo desde luego que la superficie convexâ terminada por las aristas AF, BG, y por los arcos AuB, FxG, no puede ser menor que el rectángulo ABGF, parte correspondiente de la superficie del prisma inscrito.

En efecto, sea S la superficie convexâ de que tratamos, y sea, si es posible, el rectángulo ABGF ó $AB \times AF = S + M$, siendo M una cantidad positiva.

Prolónguese la altura AF del prisma y del cilindro hasta una distancia AF′ igual á n veces AF, representando n un número entero qualquiera. Si prolongamos al mismo tiempo el cilindro y el prisma, claro es que la superficie convexâ S′, comprehendida entre las aristas AF′, BG′, contendrá n veces á la superficie S; de modo que tendremos $S' = nS$, y por ser $n \times AF = AF'$, resultará $AB \times AF' = nS + nM = S' + nM$. Pero siendo n un número entero qualquiera, y M una superficie dada, podemos tomar n de modo que sea nM mayor que el duplo del segmento AuB, pues basta para esto hacer $u > \frac{2\,AuB}{M}$. Luego entónces el rectángulo $AB \times AF'$, ó la superficie plana ABG′F′ seria mayor que la superficie exterior, compuesta de la superficie convexâ S′, y de dos segmentos circulares iguales AuB, $F'x'G'$. Pero, al contrario, la segunda superficie es mayor que la primera, segun el lema preliminar: luego 1.° no puede ser $S < ABGF$.

Digo en segundo lugar, que esta misma superficie convexâ S no puede ser igual á la del rectángulo ABGF. Porque supongamos, si es posible, que haciendo $AE = AB$, la superficie convexâ AMK sea igual al rectángulo AFKE. Por un punto qualquiera M del arco AME, tírense las cuerdas AM, ME, y levántese al plano de la base la perpendicular MN. Los tres rectángulos AMNF, MEKN, AEKF, por ser de una misma altura, estan entre sí como sus bases AM, ME, AE. Pero tenemos $AM + ME > AE$: luego la suma de los rectángulos AMNF, MEKN es mayor que el rectángulo AFKE. Este es equivalente por suposicion á la superficie convexâ AMK, compuesta de las dos superficies parciales AN, MK: luego la suma de los rectángulos AMNF, MEKN es mayor que la de las superficies convexâs correspondientes AN, MK: luego será preciso que á lo ménos uno de los rectángulos AMNF, MEKN sea mayor que la superficie convexâ correspondiente. Esta conseqüencia es contraria á la primera parte ya demostrada: luego 2.° la superficie convexâ S no puede ser igual á la del rectángulo correspondiente ABGF.

De aquí se sigue que tenemos $S > ABGF$, y que así la superficie convexâ del cilindro es mayor que la de qualquiera prisma inscrito.

Por un razonamiento de todo punto semejante se probará que la superficie convexâ del cilindro es menor que la de qualquiera prisma circunscrito.

NOTA XII.

Sobre la igualdad y semejanza de los poliedros.

Al principio del libro II de Euclides se ven las definiciones 9 y 10 puestas en estos términos:

„ 9. Dos sólidos son semejantes quando estan comprehendidos por igual número de planos respectivamente semejantes.„

„ 10. Dos sólidos son iguales y semejantes quando estan comprehendidos por igual número de planos respectivamente iguales y semejantes.„

Siendo el objeto de estas definiciones uno de los puntos mas dificiles de los elementos de Geometría, las exâminarémos muy por menor, observando al mismo tiempo las reflexîones hechas á este asunto por Roberto Simson en su edicion de los elementos pág. 388 y sig...

Observarémos desde luego con Roberto Simson, que la definicion X no es propiamente una definicion, sino mas bien un teorema que seria preciso demostrar; porque el que dos sólidos tengan sus caras iguales, no prueba que sean ellos iguales; y, si esta proposicion es cierta, es preciso demostrarla por la superposicion, ó de otro modo qualquiera.

Vemos luego que el defecto de la definicion 10 es comun á la definicion 9. Porque si no está demostrada la definicion 10, podremos creer que exîsten dos sólidos desiguales y desemejantes, cuyas caras son iguales; pero en este caso, segun la definicion 9, un tercer sólido que tuviese las caras semejantes á las de los dos primeros, seria semejante á cada uno de ellos, y de este modo seria semejante á dos cuerpos de diferente forma; cuya conclusion implica contradicion, ó á lo ménos no conviene con la idea que prestamos naturalmente á la palabra *semejante*.

Muchas proposiciones de los libros XI y XII de Euclides se fundan en las definiciones 9 y 10, entre otras la prop. XXVIII, lib. XI, de la qual pende la medida de los prismas y pirámides. Parece pues que podemos tachar á los elementos de Euclides el contener bastantes proposiciones que no estan demostradas rigurosamente. Pero hay una circunstancia que debilita esta imputacion, y no debemos omitirla.

Las figuras, cuya igualdad ó semejanza demuestra Euclides, fundándose en las definiciones 9 y 10, son tales, que sus ángulos sólidos no se componen de mas que tres ángulos planos; pero se ha demostrado con bastante claridad en muchas partes de Euclides que dos ángulos sólidos, compuestos de tres ángulos planos respectivamente iguales, son iguales. Por otra parte, si dos poliedros tienen sus caras iguales ó semejantes cada una á la suya, los ángulos sólidos homólogos se compondrán de un mismo número de ángulos planos respectivamente iguales. Luego miéntras los ángulos planos no pasan de tres en cada ángulo sólido, es claro que los ángulos sólidos homólogos son iguales. Pero si son iguales las caras homólogas, y los ángulos homólogos, no cabe duda en que los sólidos lo son tambien; porque podriamos sobreponerlos, ó á lo ménos serán simétricos uno á otro. Aquí se vé, pues, que las definiciones 9 y 10 son ciertas y admisibles, al ménos en el caso de los ángulos triples, que es el único que ha usado Euclides. Así la falta de exâctitud, que podriamos tachar á este autor, ó á sus comentadores, pierde de su fuerza, y solo recae sobre restricciones y explicaciones que él no ha hecho.

Nos queda por exâminar si la definicion 10, que es cierta en el caso de los ángulos sólidos triples, lo es tambien en general. Roberto Simson asegura que no, y que se pueden construir dos sólidos desiguales, que esten comprehendidos por un mismo número de caras respectivamente iguales. "Imagínese, dice este Autor, que á un poliedro „qualquiera se le añade una pirámide, dándola por base una „de las caras del poliedro. Imagínese tambien, que en vez „de añadir la pirámide, se quita, formando en el poliedro „un vacío igual á la pirámide; tendrémos así dos nuevos „sólidos, cuyas caras serán respectivamente iguales, y á „pesar de esto ellos serán desiguales."

Así quiere probar su asercion Roberto Simson; pero obsérvese que uno de los mencionados sólidos tiene ángulos sólidos entrantes. Es pues mas probable que Euclides ha querido excluir los cuerpos irregulares que tienen vacíos ó ángulos sólidos entrantes, ciñéndose á los poliedros convexôs. Si admitimos esta restriccion, sin la qual ademas dexarian de ser ciertas otras proposiciones, el exemplo de Roberto Simson nada prueba contra la definicion ó el teorema de Euclides; ántes bien creemos, despues de haberlo pensado muy despacio, que este teorema es cierto, aunque no parece fácil demostrarlo.

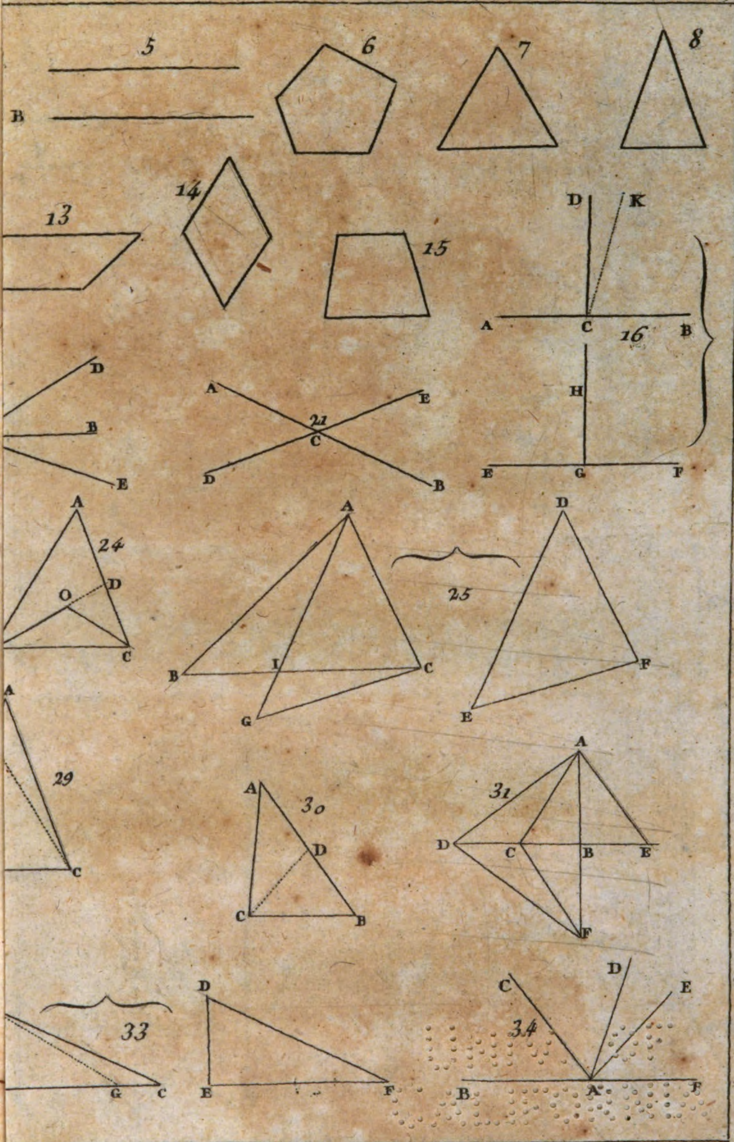
Sea como fuere, resulta de estas observaciones que las definiciones 9 y 10 de Euclides no pueden dexarse como estan. Roberto Simson suprime la definicion de los sólidos iguales, que en efecto solo debe hallarse entre los teoremas; y da la definicion de *sólidos semejantes* á los que estan comprehendidos por un mismo número de planos semejantes, y que tienen los ángulos sólidos respectivamente iguales. Esta definicion es cierta, pero tiene el inconveniente de contener muchas condiciones superfluas. Si suprimiésemos la condicion de los ángulos sólidos iguales, dariamos en la definicion de Euclides, que es defectuosa por suponer la demostracion del teorema sobre los poliedros iguales. Para evitar tropiezos, hemos juzgado del caso dividir la definicion de los sólidos semejantes en dos partes; primero hemos definido las pirámides tringulares semejantes, luego los *sólidos semejantes*, diciendo que son los que tienen bases semejantes, y cuyos vértices homólogos, fuera de estas bases, estan determinados por pirámides triangulares respectivamente semejantes.

Esta definicion necesita para las bases, suponiéndolas triangulares, dos condiciones, y para cada vértice fuera de las bases tres condiciones; de modo que si S es el número de ángulos sólidos de cada poliedro, la semejanza de estos dos poliedros exîgirá 2 + 3 (S - 3) ángulos iguales de ambas partes, ó 3S - 7 condiciones, y ninguna de ellas está de mas, ni comprehendida en las otras. Porque consideramos aquí dos poliedros como que tienen simplemente el mismo número de vértices ó ángulos sólidos; entónces son precisas las 3S - 7 condiciones, sin exceptuar ninguna, para que los dos sólidos sean semejantes; pero si ántes de todo supiésemos que ambos son *de la misma especie*, esto es, que tienen igual número de caras, y que estas caras, comparadas respectivamente, tienen igual número de lados, esta suposicion tendria tres condiciones en el caso de haber caras de mas de tres lados, y estas condiciones disminuirian tanto el número 3S - 7; de modo que en lugar de 3S-6 condiciones, bastarian A- I; sobre lo qual véase la nota VII.

Aquí se ve en qué estriva la dificultad de dar una buena definicion de los sólidos semejantes, y es, que se pueden considerar como que son de la misma especie, ó como que solo tienen igual número de ángulos sólidos. No hay dificultad alguna en este último caso, y es preciso que se verifiquen las 3S-7 condiciones contenidas en la definicion, para que sean semejantes los sólidos, y entónces se deducirá con mayor fundamento que son de la misma especie. Por lo demas, siendo completa nuestra definicion, hemos deducido de ella como teorema la de Roberto Simson.

Se ve, pues, que se puede prescindir en los elementos del teorema perteneciente á la igualdad de los poliedros; pero como dicho teorema es interesante de suyo, seria de desear que se hallase una demostracion general de él.

FIN DE LAS NOTAS.


5
B
6
7
8
13
14
15
D
K
A
C
16
B
H
E
G
F
D
B
E
A
E
21
C
D
B
A
24
O
D
C
A
B
I
C
G
25
D
F
E
A
29
C
A
30
D
C
B
A
31
D
C
B
E
F
33
G
C
D
E
F
C
D
E
34
B
A
F